GENERALIZED DERIVATION **PADA Γ-RING**

SKRIPSI

oleh:

DEDY ZULKHARNAIN PURNAMAADI

135090401111026

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2017

GENERALIZED DERIVATION PADA Γ-RING

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains dalam bidang Matematika

oleh:
DEDY ZULKHARNAIN PURNAMAADI
135090401111026

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2017

LEMBAR PENGESAHAN

***GENERALIZED DERIVATION* PADA Γ-RING**

oleh:
DEDY ZULKHARNAIN PURNAMAADI
135090401111026

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 19 Januari 2017
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh
gelar Sarjana Sains
dalam bidang Matematika

Pembimbing

Dr. Noor Hidayat, M.Si
NIP. 196112041988021001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., MSi. Ph.D
NIP. 197509082000031003

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	**: Dedy Zulkharnain Purnamaadi**
NIM	**: 135090401111026**
Jurusan	**: Matematika**
Judul Skripsi	**: *Generalized Derivation* pada Γ-Ring**

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. **Isi dari Skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam Skripsi ini.**
2. **Apabila di kemudian hari ternyata Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 19 Januari 2017
Yang menyatakan,

(Dedy Zulkharnain Purnamaadi)
NIM. 135090401111026

GENERALIZED DERIVATION PADA Γ-RING

ABSTRAK

Misalkan M adalah suatu Γ-ring prima yang memenuhi $x\alpha y\beta z = x\beta y\alpha z$ untuk setiap $x, y, z \in M$, $\alpha, \beta \in \Gamma$ dan U adalah suatu ideal tak nol dari M. Pada skripsi ini ditunjukkan jika M memuat suatu *generalized derivation* F dengan suatu *derivation* tak nol d dan memenuhi syarat tertentu maka M komutatif.

Kata Kunci : Γ-ring prima, *derivation, generalized derivation*

GENERALIZED DERIVATION ON Γ-RING

ABSTRACT

Let M be a prime Γ-ring that satisfies $x\alpha y\beta z = x\beta y\alpha z$ for all $x, y, z \in M$, $\alpha, \beta \in \Gamma$ and U be a non zero ideal of M. In this paper, if M admits a generalized derivation F associated with a non zero derivation d and satisfies a certain condition so that M is commutative.

Keywords : prime Γ-ring, derivation, generalized derivation

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan petunjuk-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul ***Generalized Derivation* pada Γ-Ring**.

Adapun maksud dan tujuan dari penyusunan skripsi ini adalah untuk memenuhi persyaratan untuk memperoleh gelar sarjana Sains dalam bidang Matematika di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Brawijaya.

Pada saat penyusunan skripsi ini, penulis mendapat banyak pengalaman serta bantuan dari pihak-pihak yang terlibat secara langsung maupun tidak langsung. Untuk itu, pada kesempatan ini penulis ingin menyampaikan rasa terima kasih kepada:

1. Dr. Noor Hidayat, M.Si selaku dosen pembimbing atas segala bimbingan, motivasi, saran, waktu, dan kesabaran yang telah diberikan selama proses pengerjaan Skripsi ini,
2. Vira Hari K, S.Si., M.Sc., dan Drs. Bambang Sugandi, M.Si selaku dosen penguji atas segala kritik dan saran yang diberikan untuk perbaikan Skripsi ini,
3. Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si, M.Si., Ph.D, dan Dr. Isnani Darti, S.Si.,M.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika, Ketua Program Studi Matematika, dan dosen pembimbing akademik,
4. Ibu Ari Andari dan Bapak Joko Purnomo beserta keluarga tercinta yang tiada henti mendoakan dan memberikan motivasi agar penulis dapat menyelesaikan Skripsi ini,

5. Seluruh dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmu pengetahuannya kepada penulis, serta segenap staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuannya,

6. Usy yang selalu menemani dan menyegarkan pikiran penulis,

7. Keluarga besar SOBAT yang selalu memberi motivasi dan kesibukan kepada penulis,

8. Semua pihak yang telah membantu yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Semoga Allah SWT memberikan anugerah dan barokah-Nya kepada semua pihak yang telah membantu menyelesaikan Skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan Skripsi ini masih terdapat kekurangan. Untuk itu, kritik yang membangun sangat penulis harapkan sebagai masukan untuk penulisan selanjutnya, melalui email dedyzulkharnain37@gmail.com. Harapan penulis semoga Skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca dalam menambah wawasan keilmuan atau bahan informasi lainnya.

Malang, 26 Desember 2016

Penulis

Daftar Isi

Daftar Tabel

Daftar Simbol

Notasi	**Keterangan**
F	*Generalized Derivation*
d	*Derivation*
f	Pemetaan
M	Γ-ring
Γ	Gamma
U	Ideal pada Γ-ring
$\mathbb{R}$	Himpunan Bilangan Real
$\mathbb{Z}$	Himpunan Bilangan Asli
$\mathbb{Z}_n$	Himpunan Bilangan Asli modulo n
$+$	Operasi Penjumlahan
$\bullet$	Operasi Pergandaan
$*$	Operasi Biner
$\subseteq$	Himpunan Bagian
$\in$	Elemen
$[x, y]$	Komutator
$[x, y]_\alpha$	Komutator terhadap alpha
$\neq$	Tidak sama dengan
$C(M)$	Senter dari M

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Γ-ring adalah perluasan dari teori ring. Namun definisi dari Γ-ring sedikit berbeda dari definisi ring serta lebih mirip dengan definisi dari suatu modul yang memenuhi beberapa aksioma-aksioma tertentu. Konsep tentang Γ-ring pertama kali ditemukan oleh Nobusawa pada tahun 1964 dalam jurnalnya yang berjudul *On a Generalization of the Ring Theory.*

Konsep Γ-ring telah dikembangkan oleh Nobusawa pada tahun 1964 dan Barnes pada tahun 1966. Perkembangan yang diperoleh antara lain adalah ideal pada Γ-ring, Γ-ring prima, dan senter pada Γ-ring. Termotivasi dari eksistensi suatu *generalized derivation* pada ring, Soyturk pada tahun 1994 serta Ashraf dan Rashid pada tahun 2014 mengembangkan konsep *generalized derivation* pada Γ-ring dalam jurnalnya *The Commutativity in Prime Gamma Rings with Derivation* dan *Some Differential Identities in Prime* Γ*-rings.* Banyak penulis yang telah meneliti tentang sifat-sifat Γ-ring dengan *derivation* atau *generalized derivation.*

Ahmad N. Alkenani dkk pada tahun 2015 dalam jurnalnya yang berjudul *Generalized Derivation on Gamma Rings* memperkenalkan beberapa hasil mengenai definisi, lemma serta teorema yang berkaitan dengan *generalized derivation* pada Γ-ring. Oleh karena itu, dalam skripsi ini dibahas lemma dan teorema tentang *generalized derivation* pada Γ-ring.

1.2. Rumusan Masalah

Bedasarkan latar belakang, permasalahan yang dibahas pada skripsi ini adalah:

1. Bagaimana definisi *derivation* dan *generalized derivation* pada Γ-ring?
2. Bagaimana lemma dan teorema berserta bukti yang berkaitan dengan *generalized derivation* pada Γ-ring?

1.3. Batasan Masalah

Dalam skripsi ini permasalahan yang dibahas dibatasi pada suatu *generalized derivation* pada Γ-ring prima yang memenuhi $x\alpha y\beta z = x\beta y\alpha z$ untuk setiap $x, y, z \in M$, $\alpha, \beta \in \Gamma$.

1.4. Tujuan

Bedasarkan rumusan masalah, tujuan dari skripsi ini adalah:

1. Untuk menjelaskan definisi dari *derivation* dan *generalized derivation* pada Γ-ring.
2. Untuk membuktikan lemma dan teorema yang berkaitan dengan *generalized derivation* pada Γ-ring.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diberikan beberapa definisi dan contoh yang akan digunakan sebagai materi acuan dalam pembahasan.

2.1. Operasi Terner

Struktur Aljabar adalah suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan satu atau lebih operasi. Berikut ini diberikan definisi hasil kali kartesian, pemetaan, operasi biner dan operasi terner yang dikutip dari Chaudhuri (1983).

Definisi 2.1.1. (Hasil Kali Kartesian) Misalkan A dan B masing-masing adalah suatu himpunan tak kosong. Hasil kali kartesian dari himpunan A dan B adalah himpunan dari pasangan terurut (a, b) dengan $a \in A$ dan $b \in B$, dinotasikan dengan:

$$A \times B = \{(a, b); a \in A \wedge b \in B\}$$

Definisi 2.1.2. (Pemetaan) Misalkan A dan B masing-masing adalah himpunan tak kosong. Suatu aturan f yang memasangkan setiap elemen $a \in A$ dengan tepat satu elemen $b \in B$ disebut pemetaan dari A ke B. Dinotasikan dengan:

$$f : A \to B \text{ atau } AfB$$

Definisi 2.1.3. (Operasi Biner) Misalkan A adalah suatu himpunan tak kosong. Operasi biner pada himpunan

A adalah suatu aturan $*$ yang memasangkan suatu pasangan terurut (a, b) dengan tepat satu elemen c, dengan $a, b, c \in A$. Dinotasikan dengan:

$$\begin{aligned} * : A \times A &\to A \\ (a, b) &\mapsto *(a, b) = a * b = c \end{aligned}$$

Definisi 2.1.4. (Operasi Terner) Misalkan A adalah suatu himpunan tak kosong. Operasi terner pada himpunan A adalah suatu aturan $*$ yang memasangkan suatu tripel terurut (a, b, c) dengan tepat satu elemen d, dengan $a, b, c, d \in A$. Dinotasikan dengan:

$$\begin{aligned} * : A \times A \times A &\to A \\ (a, b, c) &\mapsto *(a, b, c) = a * b * c = d \end{aligned}$$

Contoh 2.1.5. Diberikan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$. Didefinisikan operasi penjumlahan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} + : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ (a, b, c) &\mapsto +(a, b, c) = a + b + c = d \end{aligned}$$

Akan dibuktikan bahwa operasi penjumlahan merupakan operasi terner pada $\mathbb{Z}$.

Bukti: Akan dibuktikan bahwa operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}$ merupakan pemetaan. Ambil sebarang (x_1, y_1, z_1), $(x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, dengan $x_i, y_i, z_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2$ dan $(x_1, y_1, z_1) = (x_2, y_2, z_2)$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} (x_1, y_1, z_1) = (x_2, y_2, z_2) \Rightarrow +(x_1, y_1, z_1) &= x_1 + y_1 + z_1 \\ &= x_2 + y_2 + z_2 \\ &= +(x_2, y_2, z_2) \end{aligned}$$

Terbukti bahwa operasi penjumlahan merupakan operasi terner pada $\mathbb{Z}$.

2.2. Grup

Semigrup adalah suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan satu operasi biner dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Berikut akan diberikan definisi semigrup, grup, grup komutatif, grup aditif, grup komutatif aditif, subgrup dan subgrup aditif yang dikutip dari Chaudhuri (1983).

Definisi 2.2.1. (Semigrup) Misalkan G adalah suatu himpunan tak kosong. G disebut semigrup terhadap operasi biner $*$ jika memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. G tertutup terhadap operasi biner $*$:
   $a * b \in G$ untuk setiap $a, b \in G$.

2. Operasi biner $*$ memenuhi hukum asosiatif:
   $a * (b * c) = (a * b) * c$ untuk setiap $a, b, c \in G$.

Contoh 2.2.2 Diberikan himpunan bilangan modulo 4 yaitu $\mathbb{Z}_4$. Akan dibuktikan bahwa $\mathbb{Z}_4$ terhadap operasi perkalian($\bullet$) merupakan semigrup.

Bukti: Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}_4, \bullet)$ memenuhi sifat tertutup dan assosiatif.

Tabel 2.1: Hasil operasi perkalian pada $\mathbb{Z}_4$

$\bullet$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Dari Tabel 2.1 dapat diperoleh bahwa

1. $\mathbb{Z}_4$ tertutup terhadap operasi perkalian
   $x \bullet y \in \mathbb{Z}_4$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}_4$.

   Untuk selanjutnya, penulisan $x \bullet y$ cukup ditulis dengan xy.

2. Operasi perkalian memenuhi sifat asosiatif
   $x(yz) = (xy)z$ untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{Z}_4$

Terbukti bahwa $(\mathbb{Z}_4, \bullet)$ merupakan semigrup.

Definisi 2.2.3. (Grup) Misalkan G adalah suatu himpunan tak kosong. G disebut grup terhadap suatu operasi biner $*$ jika memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. G tertutup terhadap operasi biner $*$:
   $a * b \in G$ untuk setiap $a, b \in G$.

2. Operasi biner $*$ memenuhi hukum asosiatif:
   $a * (b * c) = (a * b) * c$ untuk setiap $a, b, c \in G$.

3. Eksistensi elemen identitas:
   Terdapat suatu elemen $e \in G$ yang memenuhi $a * e = e * a = a$ untuk setiap $a \in G$. Elemen e disebut elemen identitas dari grup G.

4. Eksistensi invers dari setiap elemen:
   Untuk setiap $a \in G$, terdapat suatu elemen $a^{-1} \in G$ yang memenuhi $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$. Elemen a^{-1} disebut invers dari a.

Contoh 2.2.4. Diberikan himpunan bilangan modulo 4 yaitu $\mathbb{Z}_4$. Akan dibuktikan bahwa $\mathbb{Z}_4$ terhadap operasi penjumlahan(+) merupakan grup.

Bukti: Akan dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_4, +)$ merupakan grup.

Tabel 2.2: Hasil operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}_4$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

Dari Tabel 2.2 dapat diperoleh bahwa $(\mathbb{Z}_4, +)$ memenuhi sifat:

1. $\mathbb{Z}_4$ tertutup terhadap penjumlahan
   $x + y \in \mathbb{Z}_4$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}_4$.

2. Operasi penjumlahan memenuhi sifat asosiatif
   $x + (y + z) = (x + y) + z$ untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{Z}_4$

3. Terdapat elemen identitas
   Terdapat $e = \bar{0} \in \mathbb{Z}_4$, untuk setiap $x \in \mathbb{Z}_4$, berlaku $x + \bar{0} = \bar{0} + x = x$.

4. Setiap elemen memiliki invers, yaitu
   invers dari $\bar{0}$ adalah $\bar{0} \in \mathbb{Z}_4$, karena $\bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$
   invers dari $\bar{1}$ adalah $\bar{3} \in \mathbb{Z}_4$, karena $\bar{1} + \bar{3} = \bar{0}$
   invers dari $\bar{2}$ adalah $\bar{2} \in \mathbb{Z}_4$, karena $\bar{2} + \bar{2} = \bar{0}$
   invers dari $\bar{3}$ adalah $\bar{1} \in \mathbb{Z}_4$, karena $\bar{3} + \bar{1} = \bar{0}$

Terbukti bahwa $\mathbb{Z}_4$ terhadap operasi penjumlahan merupakan grup.

Definisi 2.2.5. (Grup Komutatif) Misalkan G adalah suatu grup dengan operasi biner $*$. G disebut grup komutatif jika operasi biner $*$ memenuhi sifat komutatif: $a * b = b * a$ untuk setiap $a, b \in G$.

Contoh 2.2.6. Diberikan himpunan bilangan modulo 2 yaitu $\mathbb{Z}_2$. Akan dibuktikan bahwa $\mathbb{Z}_2$ terhadap operasi penjumlahan merupakan grup komutatif.

Bukti: Akan dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_2, +)$ merupakan grup komutatif.

Tabel 2.3: Hasil operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}_2$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

Dari Tabel 2.3 dapat diperoleh bahwa $(\mathbb{Z}_2, +)$ memenuhi sifat:

1. $\mathbb{Z}_2$ tertutup terhadap penjumlahan
   $x + y \in \mathbb{Z}_2$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}_2$.
2. Operasi penjumlahan memenuhi sifat asosiatif
   $x + (y + z) = (x + y) + z$ untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{Z}_2$
3. Terdapat elemen identitas
   Terdapat $e = \bar{0} \in \mathbb{Z}_2$, untuk setiap $x \in \mathbb{Z}_2$, berlaku $x + \bar{0} = \bar{0} + x = x$.
4. Setiap elemen memiliki invers, yaitu
   invers dari $\bar{0}$ adalah $\bar{0} \in \mathbb{Z}_2$, karena $\bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$
   invers dari $\bar{1}$ adalah $\bar{1} \in \mathbb{Z}_2$, karena $\bar{1} + \bar{1} = \bar{0}$
5. Operasi penjumlahan memenuhi sifat komutatif
   $x + y = y + x$, untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}_2$

Terbukti bahwa $(\mathbb{Z}_2, +)$ merupakan grup komutatif.

Definisi 2.2.7. (Grup Aditif) Misalkan G adalah suatu grup. G disebut grup aditif jika operasi biner yang digunakan adalah operasi penjumlahan.

Contoh 2.2.8. Diberikan himpunan bilangan modulo 3 yaitu $\mathbb{Z}_3$. Akan dibuktikan bahwa $\mathbb{Z}_3$ merupakan grup aditif.

Bukti: Akan dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_3, +)$ merupakan grup.

Tabel 2.4: Hasil operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}_3$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

Dari Tabel 2.4 dapat diperoleh bahwa $(\mathbb{Z}_3, +)$ memenuhi sifat:

1. $\mathbb{Z}_3$ tertutup terhadap penjumlahan
   $x + y \in \mathbb{Z}_3$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}_3$.

2. Operasi penjumlahan memenuhi sifat asosiatif
   $x + (y + z) = (x + y) + z$ untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{Z}_3$

3. Terdapat elemen identitas
   Terdapat $e = \bar{0} \in \mathbb{Z}_3$, untuk setiap $x \in \mathbb{Z}_3$, berlaku $x + \bar{0} = \bar{0} + x = x$.

4. Setiap elemen memiliki invers, yaitu
   invers dari $\bar{0}$ adalah $\bar{0} \in \mathbb{Z}_3$, karena $\bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$
   invers dari $\bar{1}$ adalah $\bar{2} \in \mathbb{Z}_3$, karena $\bar{1} + \bar{2} = \bar{0}$
   invers dari $\bar{2}$ adalah $\bar{1} \in \mathbb{Z}_3$, karena $\bar{2} + \bar{1} = \bar{0}$

Terbukti bahwa $\mathbb{Z}_3$ merupakan grup aditif.

Definisi 2.2.9. (Grup Komutatif Aditif) Misalkan G adalah suatu grup. G disebut grup komutatif aditif jika G adalah grup aditif dan operasi biner penjumlahan memenuhi sifat komutatif pada G yaitu $a+b=b+a$ untuk setiap $a, b \in G$.

Contoh 2.2.10. Diberikan himpunan bilangan modulo 3 yaitu $\mathbb{Z}_3$. Akan dibuktikan bahwa $\mathbb{Z}_3$ merupakan grup komutatif aditif.

Bukti: Akan dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_3, +)$ merupakan grup komutatif. Berdasarkan Contoh 2.2.8. dapat ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}_3, +)$ memenuhi aksioma tertutup, assosiatif, memiliki elemen identitas, dan setiap elemen memiliki invers. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa operasi penjumlahan memenuhi sifat komutatif pada $\mathbb{Z}_3$. Berdasarkan Tabel 2.4, dapat ditunjukkan bahwa operasi penjumlahan memenuhi sifat komutatif. $x+y=y+x$, untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}_3$.

Terbukti bahwa $\mathbb{Z}_3$ merupakan grup komutatif aditif.

Definisi 2.2.11. (Subgrup) Misalkan $(G, *)$ adalah grup. H adalah suatu himpunan bagian tak kosong dari grup G. H disebut subgrup jika H adalah grup terhadap operasi biner yang sama dengan G.

Teorema 2.2.12. *Misalkan $(G, *)$ adalah grup. H adalah suatu himpunan bagian tak kosong dari G. H merupakan subgrup dari G jika dan hanya jka $a * b^{-1} \in H$ untuk setiap $a, b \in H$.*

Bukti:
$(\Rightarrow)$ Diketahui H merupakan subgrup dari G. Akan ditunjukkan bahwa $a * b^{-1} \in H$ untuk setiap $a, b \in H$. Karena H merupakan subgrup dari G, maka H pasti memenuhi sifat tertutup dan setiap elemen memiliki invers. Selanjutnya ambil sebarang $a, b \in H$, terdapat $b^{-1} \in H$

sedemikian sehingga $a * b^{-1} \in H$.

Terbukti jika H merupakan subgrup dari G maka $a * b^{-1} \in H$ untuk setiap $a, b \in H$.

($\Leftarrow$) Diketahui bahwa $a * b^{-1} \in H$ untuk setiap $a, b \in H$. Akan dibuktikan bahwa H merupakan subgrup dari G.

1. Ambil sebarang $a \in H$ dan $b = a \in H$ sedemikian sehingga berlaku $a * b^{-1} = a * a^{-1} = e \in H$, maka $(H, *)$ memiliki elemen identitas.

2. Ambil sebarang $a \in H$ sedemikian sehingga $e * a^{-1} = a^{-1} \in H$, maka setiap elemen di H memiliki invers.

3. Ambil sebarang $b \in H$ sedemikian sehingga $e * b^{-1} = b^{-1} \in H$. Selanjutnya ambil $a, b^{-1} \in H$ sedemikian sehingga $a * (b^{-1})^{-1} = a * b \in H$. $(H, *)$ memenuhi sifat tertutup.

4. Karena $H \subseteq G$, maka jelas $(H, *)$ memenuhi aksioma assosiatif.

Terbukti bahwa $(H, *)$ merupakan grup, sehingga terbukti bahwa H subgrup dari grup G.

Definisi 2.2.13. (Subgrup Aditif) Misalkan G adalah suatu grup aditif. H adalah suatu himpunan bagian tak kosong dari grup aditif G. H disebut subgrup aditif jika H adalah subgrup dari grup aditif G.

Contoh 2.2.14. Diberikan grup $(\mathbb{Z}_4, +)$ dan suatu himpunan bagian $H = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ dari $\mathbb{Z}_4$. Akan dibuktikan bahwa H merupakan subgrup dari $\mathbb{Z}_4$.

Bukti: Akan dibuktikan bahwa H merupakan grup terhadap operasi penjumlahan.

Tabel 2.5: Hasil operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}_2$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$

Dari Tabel 2.5 dapat ditunjukkan bahwa $(H, +)$ memenuhi sifat:

1. H tertutup terhadap penjumlahan
   $x + y \in H$ untuk setiap $x, y \in H$.
2. Operasi penjumlahan memenuhi sifat asosiatif
   $x + (y + z) = (x + y) + z$ untuk setiap $x, y, z \in H$
3. Terdapat elemen identitas
   Terdapat $e = \bar{0} \in H$, untuk setiap $x \in H$, berlaku $x + \bar{0} = \bar{0} + x = x$.
4. Setiap elemen memiliki invers, yaitu
   invers dari $\bar{0}$ adalah $\bar{0} \in H$, karena $\bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$
   invers dari $\bar{2}$ adalah $\bar{2} \in H$, karena $\bar{2} + \bar{2} = \bar{0}$

Terbukti bahwa $(H, +)$ merupakan grup dan terbukti bahwa H merupakan subgrup dari $\mathbb{Z}_4$. Karena $\mathbb{Z}_4$ merupakan grup aditif, H juga merupakan subgrup aditif dari $\mathbb{Z}_4$.

2.3. Ring

Ring adalah suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dua operasi biner dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Berikut akan diberikan definisi dari ring, ideal, senter pada ring, ring komutatif dan komutator yang dikutip dari Andari (2014).

Definisi 2.3.1. (Ring) Misalkan R adalah suatu himpunan tak kosong. R dilengkapi dua operasi biner dalam hal ini dimisalkan operasi penjumlahan($+$) dan operasi perkalian($\bullet$). R disebut ring terhadap penjumlahan dan perkalian jika memenuhi aksioma-aksioma berikut.

1. $(R, +)$ merupakan grup komutatif.
2. $(R, \bullet)$ merupakan semigrup.
3. Berlaku hukum distributif.
   $(x + y)z = xz + yz$
   $x(y + z) = xy + xz$
   untuk setiap $x, y, z \in R$.

Contoh 2.3.2. Diberikan himpunan bilangan modulo 4 yaitu $\mathbb{Z}_4$. Akan dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_4, +, \bullet)$ merupakan suatu ring.

Bukti:

1. Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}_4, +)$ merupakan grup komutatif. Bedasarkan Contoh 2.2.4. dapat ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}_4, +)$ merupakan grup dan dari Tabel 2.2 dapat ditunjukkan bahwa operasi penjumlahan memenuhi sifat komutatif $x+y = y+x$, untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}_4$.
   Terbukti bahwa $(\mathbb{Z}_4, +)$ merupakan grup komutatif.
2. Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}_4, \bullet)$ merupakan semigrup. Bedasarkan Contoh 2.2.2. dapat ditunjukkan bahwa $\mathbb{Z}_4$ merupakan semigrup terhadap operasi perkalian. Terbukti bahwa $\mathbb{Z}_4$ merupakan semigrup terhadap operasi perkalian.

3. Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{Z}_4$ memenuhi sifat distributif. Ambil sebarang $x, y, z \in \mathbb{Z}_4$ sedemikian sehingga $(x+y)z = xz + yz$ dan $x(y+z) = xy + xz$. Terbukti bahwa $\mathbb{Z}_4$ memenuhi sifat distributif.

Terbukti bahwa $(\mathbb{Z}_4, +, \bullet)$ merupakan ring.

Definisi 2.3.3. (Ideal) Misalkan $(R, +, \bullet)$ adalah suatu ring. I adalah himpunan bagian tak kosong dari R.

1. I disebut ideal kiri jika dan hanya jika memenuhi
   (a) $a + (-b) \in I$ untuk setiap $a, b \in I$.
   (b) $ra \in I$ untuk setiap $a \in I, r \in R$.
2. I disebut ideal kanan jika dan hanya jika memenuhi
   (a) $a + (-b) \in I$ untuk setiap $a, b \in I$.
   (b) $ar \in I$ untuk setiap $a \in I, r \in R$.

Jika I merupakan ideal kiri dan ideal kanan maka I disebut ideal dua sisi.

Contoh 2.3.4. Diberikan ring $(\mathbb{Z}_4, +, \bullet)$ dan himpunan bagian $I = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ dari $\mathbb{Z}_4$. Buktikan bahwa H merupakan ideal dari ring $\mathbb{Z}_4$.

Bukti:

1. Akan ditunjukkan bahwa $a + (-b) \in I$ untuk setiap $a, b \in I$. Bedasarkan Contoh 2.2.14. diketahui bahwa I merupakan subgrup dari $\mathbb{Z}_4$, sedemikian sehingga bedasarkan Teorema 2.2.12. dapat ditunjukkan bahwa $a + (-b) \in I$ untuk setiap $a, b \in I$.
2. Akan ditunjukkan bahwa $ar \in I$ dan $ra \in I$ untuk setiap $a \in I, r \in \mathbb{Z}_4$.

Tabel 2.6: Hasil operasi perkalian antara a dan r

a	r	ar	ra
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$

Dari Tabel 2.6 dapat ditunjukkan bahwa $ar = ra \in I$.

Terbukti bahwa I merupakan ideal dari ring $(\mathbb{Z}_4, +, \bullet)$.

Definisi 2.3.5. (Ring Komutatif) Misalkan $(R, +, \bullet)$ adalah suatu ring. R disebut ring komutatif jika pada R berlaku sifat $ab = ba$ untuk setiap $a, b \in R$.

Contoh 2.3.6. Diberikan ring $(\mathbb{Z}_4, +, \bullet)$. Akan dibuktikan bahwa $\mathbb{Z}_4$ merupakan ring komutatif.

Bukti: Akan ditunjukkan bahwa operasi perkalian memenuhi sifat komutatif pada $\mathbb{Z}_4$. Berdasarkan Tabel 2.1, dapat ditunjukkan bahwa operasi perkalian memenuhi sifat komutatif pada $\mathbb{Z}_4$.

Terbukti bahwa $(\mathbb{Z}_4, +, \bullet)$ merupakan ring komutatif.

Definisi 2.3.7. (Senter) Misalkan $(R, +, \bullet)$ adalah suatu ring. Senter dari R didefinisikan sebagai berikut

$$C(R) = \{a \in R | ab = ba, \text{ untuk setiap } b \in R\}.$$

Contoh 2.3.8. Diberikan ring $(\mathbb{Z}_4, +, \bullet)$. Akan ditentukan senter dari $\mathbb{Z}_4$.

Jawab: Karena $(\mathbb{Z}_4, +, \bullet)$ merupakan ring komutatif maka berlaku $ab = ba$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_4$. Oleh karena itu, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_4$, $a \in C(\mathbb{Z}_4)$. Jadi $C(\mathbb{Z}_4) = \mathbb{Z}_4$.

Definisi 2.3.9. (Komutator) Misalkan $(R, +, \bullet)$ adalah suatu ring. Didefinisikan komutator pada R sebagai berikut.

$$[a, b] = ab - ba$$

untuk setiap $a, b \in R$.

Contoh 2.3.10. Diberikan ring $(\mathbb{Z}_2, +, \bullet)$. Akan ditunjukkan bahwa semua komutator dari $\mathbb{Z}_2$ adalah $\bar{0}$.

Bukti:

Tabel 2.7: Hasil operasi perkalian pada $\mathbb{Z}_2$

x	y	xy	yx	$[x, y]$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

Bedasarkan Tabel 2.7, terbukti bahwa semua komutator dari $\mathbb{Z}_2$ adalah $\bar{0}$.

2.4. Derivation

Derivation adalah suatu pemetaan aditif yang memenuhi aksioma tertentu. Berikut diberikan definisi *derivation* dan *generalized derivation*, namun sebelumnya akan diberikan definisi dari pemetaan aditif yang dikutip dari N. Rehman (2002).

Definisi 2.4.1. (Pemetaan Aditif) Misalkan G adalah suatu himpunan tak kosong dan $f : G \to G$ adalah suatu pemetaan. f disebut pemetaan aditif jika f memenuhi:

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

untuk setiap $x, y \in G$.

Definisi 2.4.2. (*Derivation*) Misalkan $(R, +, \bullet)$ adalah suatu ring. Suatu pemetaan aditif $d : R \to R$ disebut *derivation* pada R jika d memenuhi:

$$d(xy) = d(x)y + xd(y)$$

untuk setiap $x, y \in R$.

Definisi 2.4.3. (*Generalized Derivation*) Misalkan $(R, +, \bullet)$ adalah suatu ring. Suatu pemetaan aditif $F : R \to R$ disebut *generalized derivation* jika terdapat suatu *derivation* $d : R \to R$ yang memenuhi:

$$F(xy) = F(x)y + xd(y)$$

untuk setiap $x, y \in R$.

Contoh 2.4.4. Misalkan $(R, +, \bullet)$ adalah suatu ring. Didefinisikan $F : R \to R$ dengan $F(x) = nx - xn$, untuk suatu $n \in R$, untuk setiap $x \in R$ dan $d : R \to R$ dengan $d(x) = nx - xn$, untuk suatu $n \in R$, untuk setiap xR. Akan dibuktikan bahwa F adalah suatu *generalized derivation* pada R dengan suatu *derivation* d.

Bukti:

1. Akan dibuktikan bahwa F adalah suatu pemetaan aditif di R.
   Ambil sebarang $x, y \in R$ sedemikian sehingga,
   $$\begin{aligned} F(x+y) &= n(x+y)-(x+y)n \\ &= nx+ny-xn-yn \\ &= nx-xn+ny-yn \\ &= F(x)+F(y) \end{aligned}$$
   Terbukti bahwa F merupakan suatu pemetaan aditif di R.

2. Akan dibuktikan bahwa F adalah suatu *generalized derivation* pada R.
   Ambil sebarang $x, y \in R$, sedemikian sehingga,
   $$\begin{aligned} F(xy) &= n(xy)-(xy)n \\ &= nxy-xyn \\ &= nxy+(xny-xny)-xyn \\ &= nxy-xny+xny-xyn \\ &= (nx-xn)y+x(ny-yn) \\ &= F(x)y+xd(y) \end{aligned}$$
   Terbukti bahwa F adalah *generalized derivation* pada R.

2.5. Γ-ring

Ring adalah himpunan tak kosong yang dilengkapi dua operasi biner dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Namun teori tentang ring telah diperluas oleh Nobusawa pada tahun 1964 hingga ditemukan Γ-ring. Berikut akan diberikan definisi dari Γ-ring, Γ-ring komutatif, Γ-ring prima, ideal pada Γ-ring, dan senter pada Γ-ring yang dikutip dari Nobusawa (1964) dan Alkenani dkk (2015).

Definisi 2.5.1. (Γ-ring) Misalkan M dan Γ masing-masing adalah grup komutatif aditif, dengan $M = \{x, y, z, ...\}$ dan $\Gamma = \{\alpha, \beta, \gamma, ...\}$. Didefinisikan suatu operasi $*$ pada M dan Γ sebagai berikut.

$$\begin{aligned} * : M \times \Gamma \times M &\to M \\ (x, \alpha, y) &\mapsto *(x, \alpha, y) = x * \alpha * y \end{aligned}$$

M disebut Γ-ring terhadap operasi terner $*$, jika memenuhi:

1. $x * \alpha * y \in M$
2. $(x * \alpha * y) * \beta * z = x * \alpha * (y * \beta * z)$
3. $(x + y) * \alpha * z = x * \alpha * z + y * \alpha * z$
   $x * (\alpha + \beta) * y = x * \alpha * y + x * \beta * y$
   $x * \alpha * (y + z) = x * \alpha * y + x * \alpha * z$

untuk setiap $x, y, z \in M, \alpha, \beta \in \Gamma$.

Contoh 2.5.2. Diberikan himpunan $M = \mathbb{Z}_2, \Gamma = \mathbb{Z}_3$. Didefinisikan operasi perkalian sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \bullet : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 &\to \mathbb{Z}_2 \\ (x, \alpha, y) &\mapsto \bullet(x, \alpha, y) = x \bullet \alpha \bullet y (mod 2) \\ &\qquad\qquad\qquad\quad = x\alpha y (mod 2) \end{aligned}$$

Akan dibuktikan bahwa M merupakan Γ-ring terhadap operasi perkalian.

Bukti:

1. Akan dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_2, +)$ merupakan grup komutatif. Berdasarkan Contoh 2.2.6. telah ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}_2, +)$ merupakan grup komutatif.

   Terbukti bahwa $(M, +)$ adalah grup komutatif.

2. Akan dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_3, +)$ merupakan grup komutatif. Berdasarkan Contoh 2.2.10. telah ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}_3, +)$ merupakan grup komutatif.

   Terbukti bahwa $(\Gamma, +)$ adalah grup komutatif.

3. Akan dibuktikan bahwa M merupakan Γ-ring.

Tabel 2.8: Hasil operasi perkalian pada $\mathbb{Z}_2$ dan $\mathbb{Z}_3$

x	α	y	$x\alpha y$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

Dari Tabel 2.8 dapat ditunjukkan bahwa M memenuhi:

(a) $x\alpha y \in M$

(b) $(x\alpha y)\beta z = x\alpha(y\beta z)$

(c) $(x + y)\alpha z = x\alpha z + y\alpha z$
$x(\alpha + \beta)y = x\alpha y + x\beta y$
$x\alpha(y + z) = x\alpha y + x\alpha z$

untuk setiap $x, y, z \in M, \alpha, \beta \in \Gamma$.

Terbukti bahwa M merupakan Γ-ring.

Contoh 2.5.3. Diberikan $M = \{ \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} | x, y \in \mathbb{R}\}$, $\Gamma = \{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} | \alpha \in \mathbb{R}\}$. Didefinisikan operasi perkalian pada matriks sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \bullet : M \times \Gamma \times M &\to M \\ (X, A, Y) \mapsto XAY &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1\alpha y_1 & x_1\alpha y_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Akan dibuktikan bahwa M merupakan Γ-ring terhadap operasi perkalian pada matriks.

Bukti:

1. Akan dibuktikan bahwa $(M, +)$ merupakan grup komutatif.
   Ambil sebarang $X, Y, Z \in M$ dengan $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix}$, dan $Z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix}$ sedemikian sehingga

   (a) M memenuhi sifat tertutup terhadap operasi penjumlahan
   $$\begin{aligned} X + Y &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 + y_1 & x_2 + y_2 \end{pmatrix} \in M \end{aligned}$$
   dengan $x_1 + y_1, x_2 + y_2 \in \mathbb{R}$.

   (b) Operasi penjumlahan memenuhi sifat assosiatif pada M
   $$\begin{aligned} (X + Y) + Z &= (\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix}) + \\ &\quad \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 + y_1 & x_2 + y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + z_1 & x_2 + y_2 + z_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 + z_1 & y_2 + z_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & + ((\, y_1 & y_2 \end{pmatrix}) + \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix}) \\ &= X + (Y + Z) \end{aligned}$$

(c) Terdapat $I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \in M$ sedemikian sehingga untuk setiap $X \in M$ berlaku $X + I = I + X = X$.

(d) Untuk setiap $X \in M$, terdapat $X^{-1} = \begin{pmatrix} -x_1 & -x_2 \end{pmatrix} \in M$ sedemikian sehingga $X + X^{-1} = X^{-1} + X = I$.

(e) Operasi penjumlahan memenuhi sifat komutatif pada M

$$\begin{aligned} X + Y &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 + y_1 & x_2 + y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y_1 + x_1 & y_2 + x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \\ &= Y + X \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $(M, +)$ merupakan grup komutatif.

2. Akan dibuktikan bahwa $(\Gamma, +)$ merupakan grup komutatif.

Ambil sebarang $A, B, C \in \Gamma$ dengan $A = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \end{pmatrix}$, sedemikian sehingga

(a) Γ tertutup terhadap operasi penjumlahan

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ 0 \end{pmatrix} \in \Gamma \end{aligned}$$

(b) Operasi penjumlahan memenuhi sifat asosiatif pada Γ

$$\begin{aligned} A + B + C &= \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha + \beta + \gamma \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta+\gamma \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$
$$= A + (B + C)$$

(c) Terdapat $I = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \Gamma$ sedemikian sehingga untuk setiap $A \in \Gamma$ berlaku $A + I = I + A = A$.

(d) Untuk setiap $A \in \Gamma$, terdapat $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \in \Gamma$ sedemikian sehingga $A + A^{-1} = A^{-1} + A = I$.

(e) Operasi penjumlahan memenuhi sifat komutatif pada Γ

$$A + B = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \beta+\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= B + A$$

Terbukti bahwa $(\Gamma, +)$ merupakan grup komutatif.

3. Akan dibuktikan bahwa M merupakan Γ-ring. Ambil sebarang $X, Y, Z \in M$ dan $A, B \in \Gamma$ dengan $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix}$, sedemikian sehingga

(a) $XAY = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix}$
$$= x_1\alpha \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

$= \begin{pmatrix} x_1\alpha y_1 & x_1\alpha y_2 \end{pmatrix}$
karena $x_1\alpha y_1, x_1\alpha y_2 \in \mathbb{R}$, dapat diperoleh $XAY \in M$.

(b) $$(XAY)BZ = \left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x_1\alpha y_1 & x_1\alpha y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix}$$
$$= x_1\alpha y_1\beta \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x_1\alpha y_1\beta z_1 & x_1\alpha y_1\beta z_2 \end{pmatrix}$$
$$= x_1\alpha \begin{pmatrix} y_1\beta z_1 & y_1\beta z_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} (y_1\beta \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix})$$
$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix} \right)$$
$$= XA(YBZ)$$

(c) $$(X+Y)AZ = (\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x_1+y_1 & x_2+y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix}$$
$$= (x_1+y_1)\alpha \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (x_1\alpha+y_1\alpha)z_1 & (x_1\alpha+y_1\alpha)z_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x_1\alpha z_1+y_1\alpha z_1 & x_1\alpha z_2+y_1\alpha z_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x_1\alpha z_1 & x_1\alpha z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1\alpha z_1 & y_1\alpha z_2 \end{pmatrix}$$
$$= x_1\alpha \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix} + y_1\alpha \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix}$$
$$= XAZ + YAZ$$

dengan cara yang sama dapat diperoleh
$X(A+B)Y = XAY + XBY$
$XA(Y+Z) = XAY + XAZ$

Terbukti bahwa M merupakan Γ-ring.

Definisi 2.5.4. (Ideal pada Γ-ring) Misalkan M adalah suatu Γ-ring dan U adalah subgrup aditif dari M. Didefinisikan

$$U\Gamma M = \{u * \alpha * x | u \in U, \alpha \in \Gamma, x \in M\}.$$
$$M\Gamma U = \{x * \alpha * u | x \in M, \alpha \in \Gamma, u \in U\}.$$

1. U disebut ideal kanan dari M jika $U\Gamma M \subseteq U$
2. U disebut ideal kiri dari M jika $M\Gamma U \subseteq U$

U disebut Ideal dari M jika U merupakan ideal kanan dan ideal kiri dari M.

Contoh 2.5.5. Diberikan M adalah Γ-ring dengan $M = \mathbb{Z}_4$, dan $\Gamma = \mathbb{Z}_5$. $U = \{\bar{0}, \bar{2}\} \subset M$. Akan ditunjukkan bahwa U adalah ideal dari M.

Bukti:

1. Akan ditunjukkan bahwa U adalah subgrup dari M terhadap operasi penjumlahan. Berdasarkan Contoh 2.2.14. telah ditunjukkan bahwa U merupakan subgrup dari M.
   Terbukti bahwa U adalah subgrup dari M.
2. Akan dibuktikan bahwa U adalah ideal dari M.

(a) Ideal kanan

$U\Gamma M = \{\bar{0}, \bar{2}\} \bullet \mathbb{Z}_5 \bullet \mathbb{Z}_4$
$\qquad = \{\bar{0}, \bar{2}\} \subseteq U$

Jadi, U adalah ideal kanan dari M.

(b) Ideal kiri

$M\Gamma U = \mathbb{Z}_4 \bullet \mathbb{Z}_5 \bullet \{\bar{0}, \bar{2}\}$
$\qquad = \{\bar{0}, \bar{2}\} \subseteq U$

Jadi, U adalah ideal kiri dari M.

Karena U merupakan ideal kanan dan ideal kiri dari M, maka U ideal dari M.

Terbukti bahwa U adalah ideal dari M.

Definisi 2.5.6. (Senter pada Γ-ring) Misalkan M adalah suatu Γ-ring. Senter dari suatu Γ-ring M dinotasikan dengan

$$C(M) = \{x \in M | x * \alpha * y = y * \alpha * x, \forall y \in M, \forall \alpha \in \Gamma\}.$$

Contoh 2.5.7. Diberikan M adalah Γ-ring dengan $M = \mathbb{Z}_2$, dan $\Gamma = \mathbb{Z}_3$. Akan ditentukan senter dari M.

Jawab:

Tabel 2.9: Hasil operasi perkalian pada $\mathbb{Z}_2$ dan $\mathbb{Z}_3$

x	α	y	$x\alpha y$	$y\alpha x$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$

Bedasarkan Tabel 2.9, diperoleh $x\alpha y = y\alpha x$ untuk setiap $x, y \in M$, dan $\alpha \in \Gamma$, sehingga dapat diperoleh untuk setiap $x \in M$, $x \in C(M)$. Jadi $C(M) = M$.

Definisi 2.5.8. (Γ-ring Komutatif) Misalkan M adalah suatu Γ-ring terhadap operasi $*$. M disebut komutatif jika operasi $*$ memenuhi sifat komutatif pada M yaitu $x * \alpha * y = y * \alpha * x$ untuk setiap $x, y \in M, \alpha \in \Gamma$.

Contoh 2.5.9. Diberikan M adalah Γ-ring dengan $M = \mathbb{Z}_2$, $\Gamma = \mathbb{Z}_3$. Akan dibuktikan bahwa M merupakan Γ-ring komutatif.

Bukti: Bedasarkan Tabel 2.9, diperoleh $x\alpha y = y\alpha x$ untuk setiap $x, y \in M$, $\alpha \in \Gamma$. Terbukti bahwa M merupakan suatu Γ-ring komutatif.

Definisi 2.5.10. (Γ-ring Prima) Misalkan M adalah suatu Γ-ring. M disebut Γ-ring prima jika $x\Gamma M\Gamma y = \{0\}$ maka $x = 0$ atau $y = 0$ untuk setiap $x, y \in M$.

Contoh 2.5.11. Diberikan M adalah Γ-ring dengan $M = \mathbb{Z}_2, \Gamma = \mathbb{Z}_3$. Akan dibuktikan bahwa M adalah Γ-ring prima.

Bukti: Akan dibuktikan bahwa M merupakan Γ-ring prima. Pembuktian dilakukan dengan cara kontraposisi yaitu akan dibuktikan jika $x \neq 0$ dan $y \neq 0$ maka $x\Gamma M\Gamma y \neq \{0\}$. Ambil sebarang $x, y \in M$, dan andaikan $x \neq 0$ dan $y \neq 0$, sedemikian sehingga,

$$\begin{aligned} x\Gamma M\Gamma y &= x \bullet \mathbb{Z}_3 \bullet \mathbb{Z}_2 \bullet \mathbb{Z}_3 \bullet y \\ &= \{\bar{1}\} \bullet \mathbb{Z}_3 \bullet \mathbb{Z}_2 \bullet \mathbb{Z}_3 \bullet \{\bar{1}\} \\ &= \mathbb{Z}_2 \bullet \mathbb{Z}_3 \bullet \{\bar{1}\} \\ &= \mathbb{Z}_2 \\ &\neq \{0\} \end{aligned}$$

Terbukti bahwa M adalah Γ-ring prima.

Definisi 2.5.12. (Komutator pada Γ-ring) Misalkan M adalah suatu Γ-ring. Didefinisikan komutator pada M sebagai berikut:

$$[x, y]_\alpha = x * \alpha * y - y * \alpha * x$$

untuk setiap $x, y \in M$ dan $\alpha \in \Gamma$.

Lemma 2.5.13. Jika $[x, y]_\alpha = 0$ untuk setiap $x, y \in M$, $\alpha \in \Gamma$ maka M komutatif.

Bukti: Ambil sebarang $x, y \in M$, $\alpha \in \Gamma$ dengan $[x, y]_\alpha = 0$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} [x, y]_\alpha = 0 &\Rightarrow x * \alpha * y - y * \alpha * x = 0 \\ &\Rightarrow x * \alpha * y = y * \alpha * x \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa jika $[x, y]_\alpha = 0$ untuk setiap $x, y \in M$, $\alpha \in \Gamma$ maka M komutatif.

Contoh 2.5.14. Diberikan M adalah Γ-ring dengan $M = \{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} | x, y \in \mathbb{R}\}, \Gamma = \{\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} | \alpha \in \mathbb{R}\}$. Akan ditentukan komutator dari M.

Jawab: Ambil sebarang $X, Y \in M, A \in \Gamma$ dengan $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ dan $A = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned}
[X, Y]_A &= XAY - YAX \\
&= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \\
&\quad - \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \\
&= x_1\alpha \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} - y_1\alpha \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1\alpha y_1 & x_1\alpha y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1\alpha x_1 & y_1\alpha x_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1\alpha y_1 - y_1\alpha x_1 & x_1\alpha y_2 - y_1\alpha x_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & x_1\alpha y_2 - y_1\alpha x_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Karena $[X, Y]_A \neq 0$ maka M tidak komutatif.

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai definisi, lemma dan teorema dari *generalized derivation* pada Γ-ring prima beserta bukti-buktinya. Pembahasan pada skripsi ini dibatasi pada suatu *generalized derivation* pada Γ-ring prima yang memenuhi $x\alpha y\beta z = x\beta y\alpha z$ untuk setiap $x, y, z \in M$, $\alpha, \beta \in \Gamma$.

3.1. Generalized Derivation

Generalized derivation adalah suatu pemetaan aditif yang memenuhi aksioma tertentu. *Generalized derivation* pada Γ-ring berbeda dengan definisi *generalized derivation* pada ring. Berikut akan diberikan definisi dari *derivation* dan *generalized derivation* pada Γ-ring yang dikutip dari Alkenani (2015).

Definisi 3.1.1. (*Derivation* pada Γ-ring) Misalkan M adalah suatu Γ-ring. Suatu pemetaan aditif $d : M \to M$ disebut *derivation* pada M jika d memenuhi:

$$d(x * \alpha * y) = d(x) * \alpha * y + x * \alpha * d(y)$$

untuk setiap $x, y \in M, \alpha \in \Gamma$.

Contoh 3.1.2. Diberikan M adalah Γ-ring dengan $M = \{ \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} | x, y \in \mathbb{R}\}, \Gamma = \{\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} | \alpha \in \mathbb{R}\}$. Didefinisikan suatu pemetaan $d : M \to M$ dengan

$d[\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}] = \begin{pmatrix} 0 & y \end{pmatrix}$. Akan dibuktikan bahwa d merupakan *derivation* pada M.

Bukti:

1. Akan ditunjukkan bahwa d merupakan pemetaan aditif. Ambil sebarang $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \in M$ sedemikian sehingga
$$\begin{aligned} d[\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix}] &= d[\begin{pmatrix} x_1 + y_1 & x_2 + y_2 \end{pmatrix}] \\ &= \begin{pmatrix} 0 & x_2 + y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & y_2 \end{pmatrix} \\ &= d[\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}] + \\ &\quad d[\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix}] \end{aligned}$$
Terbukti bahwa d merupakan pemetaan aditif.

2. Akan ditunjukkan bahwa d merupakan *derivation* di M. Ambil sebarang $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \in M$ dan $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \in \Gamma$ sedemikian sehingga
$$d[\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix}] = d[x_1\alpha \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix}]$$
$$\begin{aligned} d[x_1\alpha \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix}] &= d[\begin{pmatrix} x_1\alpha y_1 & x_1\alpha y_2 \end{pmatrix}] \\ &= \begin{pmatrix} 0 & x_1\alpha y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & x_1\alpha y_2 \end{pmatrix} \\ &= 0 \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} + x_1\alpha \begin{pmatrix} 0 & y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} + \\ &\quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & y_2 \end{pmatrix} \\ &= d[\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}] \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} + \\ &\quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} d[\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix}] \end{aligned}$$
Terbukti bahwa d adalah *derivation* pada M.

Definisi 3.1.3. (*Generalized Derivation* pada Γ-ring) Misalkan M adalah suatu Γ-ring. Suatu pemetaan aditif $F : M \to M$ disebut *generalized derivation* jika terdapat suatu *derivation* $d : M \to M$ yang memenuhi:

$$F(x * \alpha * y) = F(x) * \alpha * y + x * \alpha * d(y)$$

untuk setiap $x, y \in M, \alpha \in \Gamma$.

Contoh 3.1.4. Diberikan M adalah Γ-ring dengan $M = \{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} | x, y \in \mathbb{R}\}, \Gamma = \{\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} | \alpha \in \mathbb{R}\}$. Didefinisikan suatu pemetaan $F : M \to M$ dengan $F[\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}] = \begin{pmatrix} x & 0 \end{pmatrix}$ dan suatu *derivation* $d : M \to M$ dengan $d[\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}] = \begin{pmatrix} 0 & -y \end{pmatrix}$. Akan dibuktikan bahwa F merupakan *generalized derivation* pada M dengan suatu *derivation* d.

Bukti:

1. Akan ditunjukkan bahwa F merupakan pemetaan aditif. Ambil sebarang $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \in M$ sedemikian sehingga
$$\begin{aligned} F[\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix}] &= F[\begin{pmatrix} x_1 + y_1 & x_2 + y_2 \end{pmatrix}] \\ &= \begin{pmatrix} x_1 + y_1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= F[\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}] + \\ &\quad F[\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix}] \end{aligned}$$
Terbukti bahwa F merupakan pemetaan aditif.

2. Akan ditunjukkan bahwa F merupakan *generalized derivation* pada M dengan suatu *derivation* d. Ambil $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \in M$ dan $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \in \Gamma$ sedemikian sehingga
$$F[\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix}] = F[x_1 \alpha \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix}]$$

$$
\begin{aligned}
F[x_1\alpha\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix}] &= F[\begin{pmatrix} x_1\alpha y_1 & x_1\alpha y_2 \end{pmatrix}] \\
&= \begin{pmatrix} x_1\alpha y_1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1\alpha y_1 & x_1\alpha y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -x_1\alpha y_2 \end{pmatrix} \\
&= x_1\alpha\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} + x_1\alpha\begin{pmatrix} 0 & -y_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} + \\
&\quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -y_2 \end{pmatrix} \\
&= F[\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}]\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} + \\
&\quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} d[\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix}]
\end{aligned}
$$

Terbukti bahwa F adalah *generalized derivation* pada M dengan *derivation* d.

3.2. Lemma dan Teorema

Berikut akan diberikan lemma dan teorema dari *generalized derivation* pada Γ-ring yang dikutip dari Alkenani (2015).

Lemma 3.2.1. *Misalkan M adalah suatu Γ-ring prima dan U adalah ideal kanan tak nol dari M. Jika $U \subseteq C(M)$ maka M komutatif.*

Bukti: Ambil sebarang $u \in U$, $x, y \in M$, $\alpha, \beta \in \Gamma$ sehingga berdasarkan Definisi 2.5.4 berlaku $u\alpha x \in U$ dan $(u\alpha x)\beta y = u\alpha x\beta y \in U$. Karena $U \subseteq C(M)$, sehingga berdasarkan Definisi 2.5.6 berlaku $(u\alpha x)\beta y = y\beta(u\alpha x)$ dan $(u\alpha x\beta y)\gamma z = z\gamma(u\alpha x\beta y)$ untuk setiap $u \in U$, $x, y, z \in M$, $\alpha, \beta \in \Gamma$.

$$
\begin{aligned}
0 &= u\alpha x\beta y\gamma z - z\gamma u\alpha x\beta y \\
&= u\alpha x\beta y\gamma z - z\gamma((u\alpha x)\beta y) \\
&= u\alpha x\beta y\gamma z - z\gamma(y\beta(u\alpha x)) \\
&= u\alpha x\beta y\gamma z - (z\gamma y)\beta(u\alpha x) \\
&= u\alpha x\beta y\gamma z - (u\alpha x)\beta(z\gamma y) \\
&= u\alpha x\beta y\gamma z - u\alpha x\beta z\gamma y \\
&= u\alpha x\beta(y\gamma z - z\gamma y) \\
&= u\alpha x\beta[y, z]_\gamma
\end{aligned}
$$

Karena M prima, sehingga berdasarkan Definisi 2.5.10 berlaku untuk $u\alpha x\beta[y, z]_\gamma = 0$ menyebabkan $u = 0$ atau $[y, z]_\gamma = 0$. Karena U adalah ideal tak nol dari M, maka $u \neq 0$ sehingga diperoleh $[y, z]_\gamma = 0$ untuk setiap $y, z \in M$, $\gamma \in \Gamma$. Berdasarkan Definisi 2.5.15 dapat ditunjukkan bahwa M komutatif.

Terbukti bahwa jika $U \subseteq C(M)$ maka M komutatif.

Contoh 3.2.2. Diberikan Γ-ring prima M dengan $M = \Gamma = \mathbb{Z}$ dan U_n adalah ideal kanan tak nol dari M dengan $U_n = n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Akan ditunjukkan jika $U \subseteq C(M)$ maka M komutatif.

Bukti: Diketahui $C(M) = \mathbb{Z} = M$, sehingga untuk setiap ideal U_n berlaku $U_n \subset C(M)$.

Jadi terbukti bahwa M komutatif.

Lemma 3.2.3. *Misalkan M adalah suatu Γ-ring prima dan U adalah ideal kanan tak nol dari M. Jika U komutatif maka M komutatif.*

Bukti: Ambil sebarang $u, v \in U$, $x, y \in M$, $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$ sedemikian sehingga $[u, v]_\alpha = 0$ karena U komutatif. Selanjutnya $v \in U$ diganti menjadi $v\beta x \in U$ sehingga diperoleh

$$0 = [u, v\beta x]_\alpha$$

$$
\begin{aligned}
&= u\alpha(v\beta x) - (v\beta x)\alpha u \\
&= u\alpha v\beta x + (-v\alpha u\beta x + v\alpha u\beta x) - v\beta x\alpha u \\
&= (u\alpha v - v\alpha u)\beta x + v\alpha u\beta x - v\beta x\alpha u \\
&= [u,v]_\alpha\beta x + (v\beta u\alpha x - v\beta u\alpha x) - v\beta x\alpha u + v\alpha u\beta x \\
&= [u,v]_\alpha\beta x + v\beta(u\alpha x - x\alpha u) - v\beta u\alpha x + v\alpha u\beta x \\
&= [u,v]_\alpha\beta x + v\beta[u,x]_\alpha \\
&= 0 + v\beta[u,x]_\alpha \\
&= v\beta[u,x]_\alpha
\end{aligned}
$$

Karena $v \in U$ dan U adalah ideal kanan dari M maka $v\gamma y \in U$. Misalkan v diganti $v\gamma y$ sehingga diperoleh $v\gamma y\beta[u,x]_\alpha = 0$. Karena M prima, berlaku untuk $v\gamma y\beta[u,x]_\alpha = 0$ menyebabkan $v = 0$ atau $[u,x]_\alpha = 0$. Karena U ideal tak nol maka $v \neq 0$ sehingga diperoleh $[u,x]_\alpha = 0$ untuk setiap $u \in U$, $x \in M$, $\alpha \in \Gamma$. Hal tersebut menunjukkan bahwa untuk setiap $u \in U$, berlaku $u \in C(M)$. Berdasarkan Lemma 3.2.1 maka dapat ditunjukkan bahwa M komutatif.

Terbukti bahwa jika U komutatif maka M komutatif.

Teorema 3.2.4. *Misalkan M adalah suatu Γ-ring prima dan U adalah ideal tak nol dari M. Jika M memuat suatu generalized derivation F dengan suatu derivation tak nol d sedemikian sehingga $[F(x),x]_\alpha = 0$ untuk setiap $x \in U$, $\alpha \in \Gamma$, maka M komutatif.*

Bukti: Ambil sebarang $x, y, z \in U$, $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$ dengan $[F(x),x]_\alpha = F(x)\alpha x - x\alpha F(x) = 0$. Karena $x \in U$ dan U subgrup aditif dari M maka $x + y \in U$. Misalkan x diganti $x + y$ sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
&[F(x+y), x+y]_\alpha = F(x+y)\alpha(x+y) - (x+y)\alpha F(x+y) \\
&0 = (F(x)+F(y))\alpha(x+y) - (x\alpha + y\alpha)(F(x)+F(y)) \\
&\quad = F(x)\alpha x + F(x)\alpha y + F(y)\alpha x + F(y)\alpha y - x\alpha F(x) \\
&\qquad - x\alpha F(y) - y\alpha F(x) - y\alpha F(y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= F(x)\alpha x - x\alpha F(x) + F(y)\alpha y - y\alpha F(y) + F(x)\alpha y \\
&\quad - y\alpha F(x) + F(y)\alpha x - x\alpha F(y) \\
&= [F(x), x]_\alpha + [F(y), y]_\alpha + [F(x), y]_\alpha + [F(y), x]_\alpha \\
&= 0 + 0 + [F(x), y]_\alpha + [F(y), x]_\alpha \\
&= [F(x), y]_\alpha + [F(y), x]_\alpha
\end{aligned}
$$

untuk setiap $x, y \in U$, $\alpha \in \Gamma$.

Karena $y \in U$ dan U ideal dari M maka $y\beta x \in U$. Misalkan y diganti $y\beta x$ sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
0 &= [F(x), y\beta x]_\alpha + [F(y\beta x), x]_\alpha \\
&= F(x)\alpha y\beta x - y\beta x\alpha F(x) + F(y\beta x)\alpha x - x\alpha F(y\beta x) \\
&= F(x)\alpha y\beta x - y\beta x\alpha F(x) + (F(y)\beta x + y\beta d(x))\alpha x - x\alpha(F(y)\beta x \\
&\quad + y\beta d(x)) \\
&= F(x)\alpha y\beta x - y\beta x\alpha F(x) + F(y)\beta x\alpha x + y\beta d(x)\alpha x \\
&\quad - x\alpha F(y)\beta x - x\alpha y\beta d(x) \\
&= F(x)\alpha y\beta x - y\beta x\alpha F(x) + F(y)\beta x\alpha x - x\alpha F(y)\beta x \\
&\quad + y\beta d(x)\alpha x + (-y\beta x\alpha d(x) + y\beta x\alpha d(x)) - x\alpha y\beta d(x) \\
&\quad + (y\alpha x\beta d(x) - y\alpha x\beta d(x)) \\
&= F(x)\alpha y\beta x - y\beta x\alpha F(x) + F(y)\beta x\alpha x - x\alpha F(y)\beta x \\
&\quad + (y\beta d(x)\alpha x - y\beta x\alpha d(x)) + y\beta x\alpha d(x)) \\
&\quad + (y\alpha x\beta d(x) - x\alpha y\beta d(x)) - y\alpha x\beta d(x) \\
&= F(x)\alpha y\beta x - y\beta x\alpha F(x) + (x\beta F(y) - (F(x)\beta y - y\beta F(x)))\alpha x \\
&\quad - x\alpha F(y)\beta x + y\beta[d(x), x]_\alpha + [y, x]_\alpha\beta d(x) \\
&\quad + y\beta x\alpha d(x) - y\alpha x\beta d(x) \\
&= F(x)\alpha y\beta x - y\beta x\alpha F(x) + x\beta F(y)\alpha x - F(x)\beta y\alpha x \\
&\quad + y\beta F(x)\alpha x - x\alpha F(y)\beta x + y\beta[d(x), x]_\alpha + [y, x]_\alpha\beta d(x) \\
&= F(x)\alpha y\beta x - F(x)\beta y\alpha x - y\beta x\alpha F(x) + y\beta F(x)\alpha x \\
&\quad + x\beta F(y)\alpha x - x\alpha F(y)\beta x + y\beta[d(x), x]_\alpha + [y, x]_\alpha\beta d(x) \\
&= y\beta[d(x), x]_\alpha + [y, x]_\alpha\beta d(x)
\end{aligned}
$$

Karena $y \in U$ dan U ideal dari M maka $y\gamma z \in U$. Misalkan y diganti $y\gamma z$ sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
0 &= y\gamma z\beta[d(x), x]_\alpha + [y\gamma z]_\alpha\beta d(x) \\
&= y\gamma z\beta d(x)\alpha x - y\gamma z\beta x\alpha d(x) + y\gamma z\alpha x\beta d(x) - x\alpha y\gamma z\beta d(x) \\
&= y\gamma z\beta d(x)\alpha x - y\gamma z\beta x\alpha d(x) + y\gamma z\alpha x\beta d(x) - x\alpha y\gamma z\beta d(x) \\
&\quad + (y\alpha x\gamma z\beta d(x) - y\alpha x\gamma z\beta d(x))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= y\gamma z\beta d(x)\alpha x - x\alpha y\gamma z\beta d(x) + y\alpha x\gamma z\beta d(x) - y\alpha x\gamma z\beta d(x)\\
&= y\gamma z\beta d(x)\alpha x + (y\alpha x - x\alpha y)\gamma z\beta d(x) - y\alpha x\gamma z\beta d(x)\\
&= [x,y]\alpha\gamma z\beta d(x) + y\gamma z\beta d(x)\alpha x - y\alpha x\gamma z\beta d(x)\\
&= [x,y]\alpha\gamma z\beta d(x)
\end{aligned}
$$

Karena M prima, berlaku untuk $[y,x]_\alpha\gamma z\beta d(x) = 0$ menyebabkan $[y,x]_\alpha = 0$ atau $d(x) = 0$. Karena diketahui d merupakan derivation tak nol maka $d(x) \neq 0$ sehingga diperoleh $[y,x]_\alpha = 0$ untuk setiap $x, y \in U$, $\alpha \in \Gamma$. Hal tersebut menunjukkan bahwa U komutatif. Berdasarkan Lemma 3.2.3 dapat ditunjukkan bahwa M komutatif.

Terbukti bahwa M komutatif.

Teorema 3.2.5. *Misalkan M adalah suatu Γ-ring prima dan U adalah suatu ideal tak nol dari M. Jika M memuat suatu generalized derivation F dengan suatu derivation tak nol d yang memenuhi salah satu dari syarat berikut:*

1. $[F(x), F(y)]_\alpha = 0$ *untuk setiap* $x, y \in U, \alpha \in \Gamma$.
2. $[F(x), F(y)]_\alpha = [x,y]_\alpha$ *untuk setiap* $x, y \in U, \alpha \in \Gamma$.
3. $[F(x), F(y)]_\alpha = [y,x]_\alpha$ *untuk setiap* $x, y \in U, \alpha \in \Gamma$.
4. $F([x,y]_\alpha) = [x,y]_\alpha$ *untuk setiap* $x, y \in U, \alpha \in \Gamma$.

maka M komutatif.

Bukti: Ambil sebarang $x, y, z, r, w \in U$, $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$.

1. Diketahui $[F(x), F(y)]_\alpha = 0$ untuk setiap $x, y \in U$, $\alpha \in \Gamma$. Karena $y \in U$ dan U ideal dari M maka $y\beta z \in U$. Misalkan y diganti $y\beta z$ sehingga diperoleh

   $$
   \begin{aligned}
   0 &= [F(x), F(y)]_\alpha\\
   &= [F(x), F(y\beta z)]_\alpha\\
   &= F(x)\alpha F(y\beta z) - F(y\beta z)\alpha F(x)\\
   &= F(x)\alpha(F(y)\beta z + y\beta d(z)) - (F(y)\beta z + y\beta d(z))\alpha F(x)
   \end{aligned}
   $$

$$
\begin{aligned}
&= F(x)\alpha F(y)\beta z + F(x)\alpha y\beta d(z) - F(y)\beta z\alpha F(x) \\
&\quad - y\beta d(z)\alpha F(x) \\
&= F(x)\alpha F(y)\beta z + F(x)\alpha y\beta d(z) + (-y\alpha F(x)\beta d(z) \\
&\quad + y\alpha F(x)\beta d(z)) - F(y)\beta z\alpha F(x) + (F(y)\beta F(x)\alpha z \\
&\quad - F(y)\beta F(x)\alpha z) - y\beta d(z)\alpha F(x) + (y\beta F(x)\alpha d(z) \\
&\quad - y\beta F(x)\alpha d(z)) \\
&= F(x)\alpha F(y)\beta z + [F(x), y]_\alpha \beta d(z) + y\alpha F(x)\beta d(z) \\
&\quad + F(y)\beta[F(x), z]_\alpha - F(y)\beta F(x)\alpha z + y\beta[F(x), d(z)]_\alpha \\
&\quad - y\beta F(x)\alpha d(z) \\
&= [F(x), y]_\alpha \beta d(z) + F(y)\beta[F(x), z]_\alpha + y\beta[F(x), d(z)]_\alpha \\
&\quad + F(x)\alpha F(y)\beta z - F(y)\beta F(x)\alpha z + y\alpha F(x)\beta d(z) \\
&\quad - y\beta F(x)\alpha d(z) \\
&= [F(x), y]_\alpha \beta d(z) + F(y)\beta[F(x), z]_\alpha + y\beta[F(x), d(z)]_\alpha \\
&\quad + F(x)\alpha F(y)\beta z - F(y)\alpha F(x)\beta z + y\alpha F(x)\beta d(z) \\
&\quad - y\alpha F(x)\beta d(z) \\
&= [F(x), y]_\alpha \beta d(z) + F(y)\beta[F(x), z]_\alpha + y\beta[F(x), d(z)]_\alpha
\end{aligned}
$$

Karena $y \in U$ dan U ideal dari M maka $r\gamma y \in U$. Misalkan y diganti $r\gamma y$ sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
0 &= [F(x), y]_\alpha \beta d(z) + F(y)\beta[F(x), z]_\alpha + y\beta[F(x), d(z)]_\alpha \\
&= [F(x), r\gamma y]_\alpha \beta d(z) + F(r\gamma y)\beta[F(x), z]_\alpha \\
&\quad + r\gamma y\beta[F(x), d(z)]_\alpha \\
&= F(x)\alpha r\gamma y\beta d(z) - r\gamma y\alpha F(x)\beta d(z) \\
&\quad + (F(r)\gamma y + r\gamma d(y))\beta(F(x)\alpha z - z\alpha F(x)) \\
&\quad + r\gamma y\beta F(x)\alpha d(z) - r\gamma y\beta d(z)\alpha F(x) \\
&= F(x)\alpha r\gamma y\beta d(z) - r\gamma y\alpha F(x)\beta d(z) \\
&\quad + F(r)\gamma y\beta F(x)\alpha z + r\gamma d(y)\beta F(x)\alpha z \\
&\quad - F(r)\gamma y\beta z\alpha F(x) - r\gamma d(y)\beta z\alpha F(x) \\
&\quad + r\gamma y\beta F(x)\alpha d(z) - r\gamma y\beta d(z)\alpha F(x) \\
&= F(x)\alpha r\gamma y\beta d(z) + (-r\alpha F(x)\gamma y\beta d(z) \\
&\quad + r\alpha F(x)\gamma y\beta d(z)) - r\gamma y\alpha F(x)\beta d(z) \\
&\quad + F(r)\gamma y\beta F(x)\alpha z - F(r)\gamma y\beta z\alpha F(x) \\
&\quad + r\gamma d(y)\beta F(x)\alpha z - r\gamma d(y)\beta z\alpha F(x) \\
&\quad + r\gamma y\beta F(x)\alpha d(z) - r\gamma y\beta d(z)\alpha F(x) \\
&= [F(x), r]_\alpha \gamma y\beta d(z) + F(r)\gamma y\beta[F(x), z]_\alpha \\
&\quad + r\gamma d(y)\beta[F(x), z]_\alpha + r\alpha F(x)\gamma y\beta d(z)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad - r\gamma y\alpha F(x)\beta d(z) + r\gamma y\beta F(x)\alpha d(z) \\
&\quad - r\gamma y\beta d(z)\alpha F(x) \\
&= [F(x), r]_\alpha \gamma y\beta d(z) + F(r)\gamma y\beta [F(x), z]_\alpha \\
&\quad + r\gamma d(y)\beta [F(x), z]_\alpha + r\gamma F(x)\alpha y\beta d(z) \\
&\quad - r\gamma y\beta d(z)\alpha F(x) \\
&= [F(x), r]_\alpha \gamma y\beta d(z) + F(r)\gamma y\beta [F(x), z]_\alpha \\
&\quad + r\gamma d(y)\beta [F(x), z]_\alpha + r\gamma F(x)\alpha y\beta d(z) \\
&\quad - r\gamma y\beta d(z)\alpha F(x) + (r\gamma y\beta F(x)\alpha d(z) \\
&\quad - r\gamma y\beta F(x)\alpha d(z)) \\
&= [F(x), r]_\alpha \gamma y\beta d(z) + F(r)\gamma y\beta [F(x), z]_\alpha \\
&\quad + r\gamma d(y)\beta [F(x), z]_\alpha + r\gamma F(x)\alpha y\beta d(z) \\
&\quad + r\gamma y\beta [F(x), d(z)]_\alpha - r\gamma y\beta F(x)\alpha d(z) \\
&= [F(x), r]_\alpha \gamma y\beta d(z) + F(r)\gamma y\beta [F(x), z]_\alpha \\
&\quad + r\gamma d(y)\beta [F(x), z]_\alpha + r\gamma F(x)\alpha y\beta d(z) \\
&\quad - r\gamma y\beta F(x)\alpha d(z) + r\gamma(-[F(x), y]_\alpha \beta d(z) \\
&\quad - F(y)\beta [F(x), z]_\alpha) \\
&= [F(x), r]_\alpha \gamma y\beta d(z) + F(r)\gamma y\beta [F(x), z]_\alpha \\
&\quad + r\gamma d(y)\beta [F(x), z]_\alpha + r\gamma F(x)\alpha y\beta d(z) \\
&\quad - r\gamma y\beta F(x)\alpha d(z) - r\gamma [F(x), y]_\alpha \beta d(z) \\
&\quad - r\gamma F(y)\beta [F(x), z]_\alpha \\
&= [F(x), r]_\alpha \gamma y\beta d(z) + F(r)\gamma y\beta [F(x), z]_\alpha \\
&\quad + r\gamma d(y)\beta [F(x), z]_\alpha + r\gamma F(x)\alpha y\beta d(z) \\
&\quad - r\gamma y\beta F(x)\alpha d(z) - r\gamma F(x)\alpha y\beta d(z) \\
&\quad + r\gamma y\alpha F(x)\beta d(z) - r\gamma F(y)\beta F(x)\alpha z \\
&\quad + r\gamma F(y)\beta z\alpha F(x) \\
&= [F(x), r]_\alpha \gamma y\beta d(z) + F(r)\gamma y\beta [F(x), z]_\alpha \\
&\quad + r\gamma d(y)\beta [F(x), z]_\alpha - r\gamma F(y)\beta [F(x), z]_\alpha
\end{aligned}
$$

Selanjutnya misalkan z diganti $F(x)$ sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
0 &= [F(x), r]_\alpha \gamma y\beta d(z) + F(r)\gamma y\beta [F(x), z]_\alpha \\
&\quad + r\gamma d(y)\beta [F(x), z]_\alpha - r\gamma F(y)\beta [F(x), z]_\alpha \\
&= [F(x), r]_\alpha \gamma y\beta d(F(x)) + F(r)\gamma y\beta [F(x), F(x)]_\alpha \\
&\quad + r\gamma d(y)\beta [F(x), F(x)]_\alpha - r\gamma F(y)\beta [F(x), F(x)]_\alpha \\
&= [F(x), r]_\alpha \gamma y\beta d(F(x))
\end{aligned}
$$

Selanjutnya, karena M prima, berlaku untuk $[F(x), r]_\alpha \gamma y \beta d(F(x)) = 0$ menyebabkan $[F(x), r]_\alpha = 0$ atau $d(F(x)) = 0$. Karena d merupakan *derivation* tak nol maka $d(F(x)) \neq 0$ sehingga $[F(x), r]_\alpha = 0$ untuk setiap $x, r \in U$, $\alpha \in \Gamma$. Misalkan $r = x \in U$ sehingga diperoleh $[F(x), x]_\alpha = 0$ untuk setiap $x \in U$, $\alpha \in \Gamma$. Berdasarkan Teorema 3.2.4 dapat ditunjukkan bahwa M komutatif.

Terbukti bahwa M komutatif.

2. Diketahui $[F(x), F(y)]_\alpha = [x, y]_\alpha$ untuk setiap $x, y \in U$, $\alpha \in \Gamma$. Karena $y \in U$ dan U ideal dari M maka $y\beta z \in U$. Misalkan y diganti $y\beta z$ sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
&[F(x), F(y)]_\alpha = [x, y]_\alpha \\
&0 = [F(x), F(y)]_\alpha - [x, y]_\alpha \\
&\quad = [F(x), F(y\beta z)]_\alpha - [x, y\beta z]_\alpha \\
&\quad = F(x)\alpha F(y\beta z) - F(y\beta z)\alpha F(x) - x\alpha y\beta z \\
&\qquad + y\beta z\alpha x \\
&\quad = F(x)\alpha(F(y)\beta z + y\beta d(z)) - (F(y)\beta z \\
&\qquad + y\beta d(z))\alpha F(x) - x\alpha y\beta z + (y\alpha x\beta z - y\alpha x\beta z) \\
&\qquad + y\beta z\alpha x + (-y\beta x\alpha z + y\beta x\alpha z) \\
&\quad = F(x)\alpha F(y)\beta z + F(x)\alpha y\beta d(z) - F(y)\beta z\alpha F(x) \\
&\qquad - y\beta d(z)\alpha F(x) - [x, y]_\alpha\beta z - y\beta[x, z]_\alpha \\
&\quad = F(x)\alpha F(y)\beta z + F(x)\alpha y\beta d(z) + (-y\alpha F(x)\beta d(z) \\
&\qquad + y\alpha F(x)\beta d(z)) - F(y)\beta z\alpha F(x) + (F(y)\beta F(x)\alpha z \\
&\qquad - F(y)\beta F(x)\alpha z) - y\beta d(z)\alpha F(x) + (y\beta F(x)\alpha d(z) \\
&\qquad - y\beta F(x)\alpha d(z)) - [x, y]_\alpha\beta z - y\beta[x, z]_\alpha \\
&\quad = F(x)\alpha F(y)\beta z + [F(x), y]_\alpha\beta d(z) + y\alpha F(x)\beta d(z) \\
&\qquad + F(y)\beta[F(x), z]_\alpha - F(y)\beta F(x)\alpha z + y\beta[F(x), d(z)]_\alpha \\
&\qquad - y\beta F(x)\alpha d(z) - [x, y]_\alpha\beta z - y\beta[x, z]_\alpha \\
&\quad = [F(x), y]_\alpha\beta d(z) + F(y)\beta[F(x), z]_\alpha + y\beta[F(x), d(z)]_\alpha \\
&\qquad + F(x)\alpha F(y)\beta z - F(y)\beta F(x)\alpha z + y\alpha F(x)\beta d(z) \\
&\qquad - y\beta F(x)\alpha d(z) - [x, y]_\alpha\beta z - y\beta[x, z]_\alpha
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= [F(x),y]_\alpha \beta d(z) + F(y)\beta[F(x),z]_\alpha + y\beta[F(x),d(z)]_\alpha \\
&\quad + F(x)\alpha F(y)\beta z - F(y)\alpha F(x)\beta z + y\alpha F(x)\beta d(z) \\
&\quad - y\alpha F(x)\beta d(z) - [x,y]_\alpha \beta z - y\beta[x,z]_\alpha \\
&= [F(x),y]_\alpha \beta d(z) + F(y)\beta[F(x),z]_\alpha + y\beta[F(x),d(z)]_\alpha \\
&\quad + [F(x),F(y)]_\alpha \beta z - [x,y]_\alpha \beta z + y\alpha F(x)\beta d(z) \\
&\quad - y\alpha F(x)\beta d(z) - y\beta[x,z]_\alpha \\
&= [F(x),y]_\alpha \beta d(z) + F(y)\beta[F(x),z]_\alpha + y\beta[F(x),d(z)]_\alpha \\
&\quad - y\beta[x,z]_\alpha
\end{aligned}
$$

Karena $y \in U$ dan U ideal dari M maka $r\gamma y \in U$. Misalkan y diganti $r\gamma y \in U$ sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
0 &= [F(x),r\gamma y]_\alpha \beta d(z) + F(r\gamma y)\beta[F(x),z]_\alpha \\
&\quad + r\gamma y\beta[F(x),d(z)]_\alpha - r\gamma y\beta[x,z]_\alpha \\
&= F(x)\alpha r\gamma y\beta d(z) - r\gamma y\alpha F(x)\beta d(z) \\
&\quad + (F(r)\gamma y + r\gamma d(y))\beta(F(x)\alpha z - z\alpha F(x)) \\
&\quad + r\gamma y\beta F(x)\alpha d(z) - r\gamma y\beta d(z)\alpha F(x) - r\gamma y\beta[x,z]_\alpha \\
&= F(x)\alpha r\gamma y\beta d(z) - r\gamma y\alpha F(x)\beta d(z) \\
&\quad + F(r)\gamma y\beta F(x)\alpha z + r\gamma d(y)\beta F(x)\alpha z \\
&\quad - F(r)\gamma y\beta z\alpha F(x) - r\gamma d(y)\beta z\alpha F(x) \\
&\quad + r\gamma y\beta F(x)\alpha d(z) - r\gamma y\beta d(z)\alpha F(x) - r\gamma y\beta[x,z]_\alpha \\
&= F(x)\alpha r\gamma y\beta d(z) + (-r\alpha F(x)\gamma y\beta d(z) \\
&\quad + r\alpha F(x)\gamma y\beta d(z)) - r\gamma y\alpha F(x)\beta d(z) \\
&\quad + F(r)\gamma y\beta F(x)\alpha z - F(r)\gamma y\beta z\alpha F(x) \\
&\quad + r\gamma d(y)\beta F(x)\alpha z - r\gamma d(y)\beta z\alpha F(x) \\
&\quad + r\gamma y\beta F(x)\alpha d(z) - r\gamma y\beta d(z)\alpha F(x) - r\gamma y\beta[x,z]_\alpha \\
&= [F(x),r]_\alpha \gamma y\beta d(z) + F(r)\gamma y\beta[F(x),z]_\alpha \\
&\quad + r\gamma d(y)\beta[F(x),z]_\alpha + r\alpha F(x)\gamma y\beta d(z) \\
&\quad - r\gamma y\alpha F(x)\beta d(z) + r\gamma y\beta F(x)\alpha d(z) \\
&\quad - r\gamma y\beta d(z)\alpha F(x) - r\gamma y\beta[x,z]_\alpha \\
&= [F(x),r]_\alpha \gamma y\beta d(z) + F(r)\gamma y\beta[F(x),z]_\alpha \\
&\quad + r\gamma d(y)\beta[F(x),z]_\alpha + r\gamma F(x)\alpha y\beta d(z) \\
&\quad - r\gamma y\beta d(z)\alpha F(x) - r\gamma y\beta[x,z]_\alpha \\
&= [F(x),r]_\alpha \gamma y\beta d(z) + F(r)\gamma y\beta[F(x),z]_\alpha \\
&\quad + r\gamma d(y)\beta[F(x),z]_\alpha + r\gamma F(x)\alpha y\beta d(z) \\
&\quad - r\gamma y\beta d(z)\alpha F(x) + (r\gamma y\beta F(x)\alpha d(z) \\
&\quad - r\gamma y\beta F(x)\alpha d(z)) - r\gamma y\beta[x,z]_\alpha
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= [F(x),r]_\alpha \gamma y\beta d(z) + F(r)\gamma y\beta [F(x),z]_\alpha \\
&\quad + r\gamma d(y)\beta [F(x),z]_\alpha + r\gamma F(x)\alpha y\beta d(z) \\
&\quad + r\gamma y\beta [F(x),d(z)]_\alpha - r\gamma y\beta F(x)\alpha d(z) \\
&\quad - r\gamma y\beta [x,z]_\alpha \\
&= [F(x),r]_\alpha \gamma y\beta d(z) + F(r)\gamma y\beta [F(x),z]_\alpha \\
&\quad + r\gamma d(y)\beta [F(x),z]_\alpha + r\gamma F(x)\alpha y\beta d(z) \\
&\quad - r\gamma y\beta F(x)\alpha d(z) + r\gamma(-[F(x),y]_\alpha \beta d(z) \\
&\quad - F(y)\beta [F(x),z]_\alpha) - r\gamma y\beta [x,z]_\alpha \\
&= [F(x),r]_\alpha \gamma y\beta d(z) + F(r)\gamma y\beta [F(x),z]_\alpha \\
&\quad + r\gamma d(y)\beta [F(x),z]_\alpha + r\gamma F(x)\alpha y\beta d(z) \\
&\quad - r\gamma y\beta F(x)\alpha d(z) - r\gamma [F(x),y]_\alpha \beta d(z) \\
&\quad - r\gamma F(y)\beta [F(x),z]_\alpha - r\gamma y\beta [x,z]_\alpha \\
&= [F(x),r]_\alpha \gamma y\beta d(z) + F(r)\gamma y\beta [F(x),z]_\alpha \\
&\quad + r\gamma d(y)\beta [F(x),z]_\alpha + r\gamma F(x)\alpha y\beta d(z) \\
&\quad - r\gamma y\beta F(x)\alpha d(z) - r\gamma F(x)\alpha y\beta d(z) \\
&\quad + r\gamma y\alpha F(x)\beta d(z) - r\gamma F(y)\beta F(x)\alpha z \\
&\quad + r\gamma F(y)\beta z\alpha F(x) - r\gamma y\beta [x,z]_\alpha \\
&= [F(x),r]_\alpha \gamma y\beta d(z) + F(r)\gamma y\beta [F(x),z]_\alpha \\
&\quad + r\gamma d(y)\beta [F(x),z]_\alpha - r\gamma F(y)\beta [F(x),z]_\alpha \\
&\quad - r\gamma y\beta [x,z]_\alpha
\end{aligned}
$$

Selanjutnya misalkan z diganti $F(x)$ sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
0 &= [F(x),r]_\alpha \gamma y\beta d(z) + F(r)\gamma y\beta [F(x),z]_\alpha \\
&\quad + r\gamma d(y)\beta [F(x),z]_\alpha - r\gamma F(y)\beta [F(x),z]_\alpha \\
&\quad - r\gamma y\beta [x,z]_\alpha \\
&= [F(x),r]_\alpha \gamma y\beta d(F(x)) + F(r)\gamma y\beta [F(x),F(x)]_\alpha \\
&\quad + r\gamma d(y)\beta [F(x),F(x)]_\alpha - r\gamma F(y)\beta [F(x),F(x)]_\alpha \\
&\quad - r\gamma y\beta [x,F(x)]_\alpha \\
&= [F(x),r]_\alpha \gamma y\beta d(F(x))
\end{aligned}
$$

Selanjutnya, karena M prima, berlaku untuk $[F(x),r]_\alpha \gamma y\beta d(F(x)) = 0$ menyebabkan $[F(x),r]_\alpha = 0$ atau $d(F(x)) = 0$. Karena d merupakan *derivation* tak nol maka $d(F(x)) \neq 0$ sehingga $[F(x),r]_\alpha = 0$ untuk setiap $x, r \in U$, $\alpha \in \Gamma$.

Misalkan $r = x \in U$ sehingga diperoleh $[F(x), x]_\alpha = 0$ untuk setiap $x \in U$, $\alpha \in \Gamma$. Berdasarkan Teorema 3.2.4 dapat ditunjukkan bahwa M komutatif.

Terbukti bahwa M komutatif.

3. Diketahui $[F(x), F(y)]_\alpha = [y, x]_\alpha$ untuk setiap $x, y \in U$, $\alpha \in \Gamma$. Karena $y \in U$ dan U ideal dari M maka $y\beta z \in U$. Misalkan y diganti $y\beta z$ sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
&[F(x), F(y)]_\alpha = [y, x]_\alpha \\
&0 = [F(x), F(y)]_\alpha - [y, x]_\alpha \\
&\quad = [F(x), F(y\beta z)]_\alpha - [y\beta z, x]_\alpha \\
&\quad = F(x)\alpha F(y\beta z) - F(y\beta z)\alpha F(x) + x\alpha y\beta z \\
&\qquad - y\beta z\alpha x \\
&\quad = F(x)\alpha(F(y)\beta z + y\beta d(z)) - (F(y)\beta z \\
&\qquad + y\beta d(z))\alpha F(x) + x\alpha y\beta z + (y\alpha x\beta z - y\alpha x\beta z) \\
&\qquad - y\beta z\alpha x + (-y\beta x\alpha z + y\beta x\alpha z) \\
&\quad = F(x)\alpha F(y)\beta z + F(x)\alpha y\beta d(z) - F(y)\beta z\alpha F(x) \\
&\qquad - y\beta d(z)\alpha F(x) + [x, y]_\alpha\beta z + y\beta[x, z]_\alpha \\
&\quad = F(x)\alpha F(y)\beta z + F(x)\alpha y\beta d(z) + (-y\alpha F(x)\beta d(z) \\
&\qquad + y\alpha F(x)\beta d(z)) - F(y)\beta z\alpha F(x) + (F(y)\beta F(x)\alpha z \\
&\qquad - F(y)\beta F(x)\alpha z) - y\beta d(z)\alpha F(x) + (y\beta F(x)\alpha d(z) \\
&\qquad - y\beta F(x)\alpha d(z)) + [x, y]_\alpha\beta z + y\beta[x, z]_\alpha \\
&\quad = F(x)\alpha F(y)\beta z + [F(x), y]_\alpha\beta d(z) + y\alpha F(x)\beta d(z) \\
&\qquad + F(y)\beta[F(x), z]_\alpha - F(y)\beta F(x)\alpha z + y\beta[F(x), d(z)]_\alpha \\
&\qquad - y\beta F(x)\alpha d(z) + [x, y]_\alpha\beta z + y\beta[x, z]_\alpha \\
&\quad = [F(x), y]_\alpha\beta d(z) + F(y)\beta[F(x), z]_\alpha + y\beta[F(x), d(z)]_\alpha \\
&\qquad + F(x)\alpha F(y)\beta z - F(y)\beta F(x)\alpha z + y\alpha F(x)\beta d(z) \\
&\qquad - y\beta F(x)\alpha d(z) + [x, y]_\alpha\beta z + y\beta[x, z]_\alpha \\
&\quad = [F(x), y]_\alpha\beta d(z) + F(y)\beta[F(x), z]_\alpha + y\beta[F(x), d(z)]_\alpha \\
&\qquad + F(x)\alpha F(y)\beta z - F(y)\alpha F(x)\beta z + y\alpha F(x)\beta d(z) \\
&\qquad - y\alpha F(x)\beta d(z) - [y, x]_\alpha\beta z - y\beta[z, x]_\alpha \\
&\quad = [F(x), y]_\alpha\beta d(z) + F(y)\beta[F(x), z]_\alpha + y\beta[F(x), d(z)]_\alpha \\
&\qquad + [F(x), F(y)]_\alpha\beta z - [x, y]_\alpha\beta z + y\alpha F(x)\beta d(z)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- y\alpha F(x)\beta d(z) - y\beta[z,x]_\alpha \\
&= [F(x),y]_\alpha \beta d(z) + F(y)\beta[F(x),z]_\alpha + y\beta[F(x),d(z)]_\alpha \\
&- y\beta[z,x]_\alpha
\end{aligned}
$$

Karena $y \in U$ dan U ideal dari M maka $r\gamma y \in U$. Misalkan y diganti $r\gamma y \in U$. Dengan cara yang sama dengan pembuktian bagian 2 sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
0 = {} & [F(x),r]_\alpha \gamma y\beta d(z) + F(r)\gamma y\beta[F(x),z]_\alpha \\
& + r\gamma d(y)\beta[F(x),z]_\alpha - r\gamma F(y)\beta[F(x),z]_\alpha \\
& - r\gamma y\beta[z,x]_\alpha
\end{aligned}
$$

Selanjutnya misalkan z diganti $F(x)$ sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
0 = {} & [F(x),r]_\alpha \gamma y\beta d(z) + F(r)\gamma y\beta[F(x),z]_\alpha \\
& + r\gamma d(y)\beta[F(x),z]_\alpha - r\gamma F(y)\beta[F(x),z]_\alpha \\
& - r\gamma y\beta[z,x]_\alpha \\
= {} & [F(x),r]_\alpha \gamma y\beta d(F(x)) + F(r)\gamma y\beta[F(x),F(x)]_\alpha \\
& + r\gamma d(y)\beta[F(x),F(x)]_\alpha - r\gamma F(y)\beta[F(x),F(x)]_\alpha \\
& - r\gamma y\beta[F(x),x]_\alpha \\
= {} & [F(x),r]_\alpha \gamma y\beta d(F(x))
\end{aligned}
$$

Selanjutnya, karena M prima, berlaku untuk $[F(x),r]_\alpha \gamma y\beta d(F(x)) = 0$ menyebabkan $[F(x),r]_\alpha = 0$ atau $d(F(x)) = 0$. Karena d merupakan *derivation* tak nol maka $d(F(x)) \neq 0$ sehingga $[F(x),r]_\alpha = 0$ untuk setiap $x, r \in U$, $\alpha \in \Gamma$. Misalkan $r = x \in U$ sehingga diperoleh $[F(x),x]_\alpha = 0$ untuk setiap $x \in U$, $\alpha \in \Gamma$. Berdasarkan Teorema 3.2.4 dapat ditunjukkan bahwa M komutatif.

Terbukti bahwa M komutatif.

4. Diketahui $F([x,y]_\alpha) = [x,y]_\alpha$ untuk setiap $x, y \in U$, $\alpha \in \Gamma$.

   $[x,y]_\alpha = F([x,y]_\alpha)\ x\alpha y - y\alpha x = F(x\alpha y - y\alpha x)$
   $x\alpha y - y\alpha x = F(x\alpha y) - F(y\alpha x)$
   $x\alpha y - y\alpha x = F(x)\alpha y + x\alpha d(y) - F(y)\alpha x - y\alpha d(x)$

$$
\begin{aligned}
x\alpha y - y\alpha x &= F(x)\alpha y - y\alpha F(x) + y\alpha F(x) + x\alpha d(y) \\
&\quad - d(y)\alpha x + d(y)\alpha x - F(y)\alpha x - y\alpha d(x) \\
x\alpha y - y\alpha x &= [F(x), y]_\alpha + y\alpha F(x) + [x, d(y)]_\alpha + d(y)\alpha x \\
&\quad - F(y)\alpha x - y\alpha d(x) \\
x\alpha y - y\alpha x &= [F(x), y]_\alpha + [x, d(y)]_\alpha + F(y\alpha x) - F(y\alpha x) \\
[x, y]_\alpha &= [F(x), y]_\alpha + [x, d(y)]_\alpha
\end{aligned}
$$

Misalkan y diganti $z\beta y$ sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
[x, y]_\alpha &= [F(x), y]_\alpha + [x, d(y)]_\alpha \\
0 &= [F(x), z\beta y]_\alpha + [x, d(z\beta y)]_\alpha - [x, z\beta y]_\alpha \\
&= F(x)\alpha z\beta y - z\beta y\alpha F(x) + x\alpha d(z\beta y) - d(z\beta y)\alpha x \\
&\quad - x\alpha z\beta y + z\beta y\alpha x \\
&= F(x)\alpha z\beta y - z\beta y\alpha F(x) + x\alpha d(z)\beta y + x\alpha z\beta d(y) \\
&\quad - d(z)\beta y\alpha x - z\beta d(y)\alpha x - x\alpha z\beta y + z\beta y\alpha x \\
&= F(x)\alpha z\beta y + x\alpha d(z)\beta y - z\beta y\alpha F(x) + x\alpha z\beta d(y) \\
&\quad - d(z)\beta y\alpha x - z\beta d(y)\alpha x - x\alpha z\beta y + z\beta y\alpha x \\
&= F(x\alpha z)\beta y - z\beta y\alpha F(x) + x\alpha z\beta d(y) - d(z)\beta y\alpha x \\
&\quad - z\beta d(y)\alpha x - x\alpha z\beta y + z\beta y\alpha x \\
&= (F(z\alpha x) + x\alpha z - z\alpha x)\beta y - z\beta y\alpha F(x) + [x, z]_\alpha\beta d(y) \\
&\quad + z\alpha x\beta d(y) + d(z)\beta[x, y]_\alpha - d(z)\beta x\alpha y - z\beta d(y)\alpha x \\
&\quad - x\alpha z\beta y + z\beta y\alpha x \\
&= [x, z]_\alpha\beta d(y) + d(z)\beta[x, y]_\alpha
\end{aligned}
$$

Misalkan y diganti x sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
0 &= [x, z]_\alpha\beta d(x) + d(z)\beta[x, x]_\alpha \\
&= [x, z]_\alpha\beta d(x)
\end{aligned}
$$

Misalkan z diganti $w\gamma z$ sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
0 &= [x, w\gamma z]_\alpha\beta d(x) \\
&= x\alpha w\gamma z\beta d(x) - w\gamma z\alpha x\beta d(x) \\
&= x\alpha w\gamma z\beta d(x) - w\alpha x\gamma z\beta d(x) + w\alpha x\gamma z\beta d(x) \\
&\quad - w\gamma z\alpha x\beta d(x) \\
&= [x, w]_\alpha\gamma z\beta d(x) + w\gamma x\alpha z\beta d(x) - w\gamma z\alpha x\beta d(x) \\
&= [x, w]_\alpha\gamma z\beta d(x) + w\gamma[x, z]_\alpha\beta d(x) \\
&= [x, w]_\alpha\gamma z\beta d(x)
\end{aligned}
$$

Selanjutnya, karena M prima, berlaku untuk

$[x,w]_\alpha \gamma z \beta d(x) = 0$ menyebabkan $[x,w]_\alpha = 0$ atau $d(x) = 0$. Karena d merupakan *derivation* tak nol maka $d(x) \neq 0$ sehingga $[x,w]_\alpha = 0$ untuk setiap $x, w \in U$, $\alpha \in \Gamma$. Hal tersebut menunjukkan bahwa U komutatif. Berdasarkan Lemma 3.2.1 dapat ditunjukkan bahwa M komutatif.

Terbukti bahwa M komutatif.

Teorema 3.2.6. *Misalkan M adalah suatu Γ-ring prima dan U adalah suatu ideal tak nol dari M. Jika M memuat suatu generalized derivation F dengan suatu derivation tak nol d yang memenuhi salah satu dari syarat berikut:*

1. $F(x\alpha y) = F(y\alpha x)$ *untuk semua* $x, y \in U, \alpha \in \Gamma$
2. $F(x\alpha y) = -F(y\alpha x)$ *untuk semua* $x, y \in U, \alpha \in \Gamma$
3. $[F(x), y]_\alpha = [x, F(y)]_\alpha$ *untuk semua* $x, y \in U, \alpha \in \Gamma$

maka M komutatif.

Bukti: Ambil sebarang $w, x, y, z \in U$, $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$.

1. Diberikan $F(x\alpha y) = F(y\alpha x)$ untuk setiap $x, y \in M$, $\alpha \in \Gamma$. Karena $y \in U$ dan U ideal dari M maka $y\beta z \in U$. Misalkan y diganti $y\beta z$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
F(x\alpha y) &= F(y\alpha x)\\
0 &= F(x\alpha y) - F(y\alpha x)\\
&= F(x)\alpha y + x\alpha d(y) - F(y)\alpha x - y\alpha d(x)\\
&= F(x)\alpha y\beta z + x\alpha d(y\beta z) - F(y\beta z)\alpha x - y\beta z\alpha d(x)\\
&= F(x)\alpha y\beta z + x\alpha d(y)\beta z + x\alpha y\beta d(z) - F(y)\beta z\alpha x\\
&\quad - y\beta d(z)\alpha x - y\beta z\alpha d(x)
\end{aligned}$$

Misalkan z diganti x sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
0 = {} & F(x)\alpha y\beta x + x\alpha d(y)\beta x + x\alpha y\beta d(x) - F(y)\alpha x\beta x\\
& - y\alpha d(x)\beta x - y\beta x\alpha d(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= F(x\alpha y)\beta x + x\alpha y\beta d(x) - F(y\alpha x)\beta x - y\beta x\alpha d(x)\\
&= F(x\alpha y)\beta x - F(y\alpha x)\beta x + [x,y]_\alpha \beta d(x)\\
&= [x,y]_\alpha \beta d(x)
\end{aligned}$$

Karena $y \in U$ dan U ideal dari M maka $y\gamma w \in U$. Misalkan y diganti $y\gamma w$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
0 &= [x, y\gamma w]_\alpha \beta d(x)\\
&= x\alpha y\gamma w\beta d(x) - y\gamma w\alpha x\beta d(x)\\
&= x\alpha y\gamma w\beta d(x) + (-y\alpha x\gamma w\beta d(x) + y\alpha x\gamma w\beta d(x))\\
&\quad - y\gamma w\alpha x\beta d(x)\\
&= [x,y]_\alpha \gamma w\beta d(x) + y\alpha x\gamma w\beta d(x) - y\gamma w\alpha x\beta d(x)\\
&= [x,y]_\alpha \gamma w\beta d(x) + y\gamma x\alpha w\beta d(x) - y\gamma x\alpha w\beta d(x)\\
&= [x,y]_\alpha \gamma w\beta d(x)
\end{aligned}$$

Karena M prima, berlaku $[x,y]_\alpha \gamma w\beta d(x) = 0$ menyebabkan $[x,y]_\alpha = 0$ atau $d(x) = 0$. Karena d merupakan derivation tak nol maka $d(x) \neq 0$ sehingga $[x,y]_\alpha = 0$ untuk setiap $x, y \in U$, $\alpha \in \Gamma$. Hal tersebut menunjukkan bahwa U komutatif. Berdasarkan Lemma 3.2.3 dapat ditunjukkan bahwa M komutatif.

Terbukti bahwa M komutatif.

2. Diketahui $F(x\alpha y) = -F(y\alpha x)$ untuk setiap $x, y \in M$, $\alpha \in \Gamma$. Karena $y \in U$ dan U ideal dari M maka $y\beta z \in U$. Misalkan y diganti $y\beta z$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
F(x\alpha y) &= -F(y\alpha x)\\
0 &= F(x\alpha y) + F(y\alpha x)\\
&= F(x)\alpha y + x\alpha d(y) + F(y)\alpha x + y\alpha d(x)\\
&= F(x)\alpha y\beta z + x\alpha d(y\beta z) + F(y\beta z)\alpha x + y\beta z\alpha d(x)\\
&= F(x)\alpha y\beta z + x\alpha d(y)\beta z + x\alpha y\beta d(z) + F(y)\beta z\alpha x\\
&\quad + y\beta d(z)\alpha x + y\beta z\alpha d(x)
\end{aligned}$$

Misalkan z diganti x sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
0 &= F(x)\alpha y\beta x + x\alpha d(y)\beta x + x\alpha y\beta d(x) + F(y)\alpha x\beta x\\
&\quad + y\beta d(x)\alpha x + y\beta x\alpha d(x)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= F(x\alpha y)\beta x + x\alpha y\beta d(x) + F(y\alpha x)\beta x + y\beta x\alpha d(x)\\
&= F(x\alpha y)\beta x + F(y\alpha x)\beta x + [x,y]_\alpha \beta d(x)\\
&= [x,y]_\alpha \beta d(x)
\end{aligned}
$$

Karena $y \in U$ dan U ideal dari M maka $y\gamma w \in U$. Misalkan y diganti $y\gamma w$ sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
0 &= [x, y\gamma w]_\alpha \beta d(x)\\
&= x\alpha y\gamma w\beta d(x) - y\gamma w\alpha x\beta d(x)\\
&= x\alpha y\gamma w\beta d(x) + (-y\alpha x\gamma w\beta d(x) + y\alpha x\gamma w\beta d(x))\\
&\quad - y\gamma w\alpha x\beta d(x)\\
&= [x,y]_\alpha \gamma w\beta d(x) + y\alpha x\gamma w\beta d(x) - y\gamma w\alpha x\beta d(x)\\
&= [x,y]_\alpha \gamma w\beta d(x) + y\gamma x\alpha w\beta d(x) - y\gamma x\alpha w\beta d(x)\\
&= [x,y]_\alpha \gamma w\beta d(x)
\end{aligned}
$$

Karena M prima, berlaku $[x,y]_\alpha \gamma w\beta d(x) = 0$ menyebabkan $[x,y]_\alpha = 0$ atau $d(x) = 0$. Karena d merupakan derivation tak nol maka $d(x) \neq 0$ sehingga $[x,y]_\alpha = 0$ untuk setiap $x, y \in U$, $\alpha \in \Gamma$. Hal tersebut menunjukkan bahwa U komutatif. Berdasarkan Lemma 3.2.3 dapat ditunjukkan bahwa M komutatif.

Terbukti bahwa M komutatif.

3. Diketahui $[F(x), y]_\alpha = [x, F(y)]_\alpha$ untuk setiap $x, y \in U$, $\alpha \in \Gamma$. Karena $y \in U$ dan U ideal dari M maka $y\beta z \in U$. Misalkan y diganti $y\beta z$ sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
[F(x), y]_\alpha &= [x, F(y)]_\alpha\\
0 &= [F(x), y]_\alpha - [x, F(y)]_\alpha\\
&= [F(x), y\beta z]_\alpha - [x, F(y\beta z)]_\alpha\\
&= F(x)\alpha y\beta z - y\beta z\alpha F(x) - x\alpha F(y\beta z) + F(y\beta z)\alpha x\\
&= F(x)\alpha y\beta z - y\beta z\alpha F(x) - x\alpha F(y)\beta z - x\alpha y\beta d(z)\\
&\quad + F(y)\beta z\alpha x + y\beta d(z)\alpha x\\
&= [F(x), y]_\alpha \beta z + y\beta F(x)\alpha z + y\beta [F(x), z]_\alpha + y\alpha F(x)\beta z\\
&\quad - [x, F(y)]_\alpha \beta z - F(y)\alpha x\beta z - [x,y]_\alpha \beta d(z) - y\alpha x\beta d(z)\\
&\quad - F(y)\beta [x,z]_\alpha + F(y)\beta x\alpha z - y\beta [x, d(z)]_\alpha + y\beta x\alpha d(z)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= [F(x), y]_\alpha \beta z + y\beta[F(x), z]_\alpha - [x, F(y)]_\alpha \beta z - [x, y]_\alpha \beta d(z) \\
&\quad - F(y)\beta[x, z]_\alpha - y\beta[x, d(z)]_\alpha \\
&= y\beta[F(x), z]_\alpha - [x, y]_\alpha \beta d(z) - F(y)\beta[x, z]_\alpha - y\beta[x, d(z)]_\alpha
\end{aligned}
$$

Misalkan z diganti x sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
0 &= y\beta[F(x), x]_\alpha - [x, y]_\alpha \beta d(x) - F(y)\beta[x, x]_\alpha - y\beta[x, d(x)]_\alpha \\
&= y\beta[F(x), x]_\alpha - [x, y]_\alpha \beta d(x) - y\beta[x, d(x)]_\alpha
\end{aligned}
$$

Karena $y \in U$ dan U ideal dari M maka $y\gamma z \in U$. Misalkan y diganti $y\gamma z$ sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
0 &= y\gamma z\beta[F(x), x]_\alpha - [x, y\gamma z]_\alpha \beta d(x) - y\gamma z\beta[x, d(x)]_\alpha \\
&= y\gamma z\beta[F(x), x]_\alpha - x\alpha y\gamma z\beta d(x) + y\gamma z\alpha x\beta d(x) \\
&\quad - y\gamma z\beta[x, d(x)]_\alpha \\
&= y\gamma([x, z]_\alpha \beta d(x) + z\beta[x, d(x)]_\alpha) - x\alpha y\gamma z\beta d(x) \\
&\quad + (y\alpha x\gamma z\beta d(x) - y\alpha x\gamma z\beta d(x)) + y\gamma z\alpha x\beta d(x) \\
&\quad - y\gamma z\beta[x, d(x)]_\alpha \\
&= y\gamma[x, z]_\alpha \beta d(x) + y\gamma z\beta[x, d(x)]_\alpha - [x, y]_\alpha \gamma z\beta d(x) \\
&\quad - y\gamma x\alpha z\beta d(x) + y\gamma z\alpha x\beta d(x) - y\gamma z\beta[x, d(x)]_\alpha \\
&= y\gamma[x, z]_\alpha \beta d(x) - [x, y]_\alpha \gamma z\beta d(x) - y\gamma[x, z]_\alpha \beta x \\
&= [x, y]_\alpha \gamma z\beta d(x)
\end{aligned}
$$

Karena M prima, berlaku $[x, y]_\alpha \gamma z\beta d(x) = 0$ menyebabkan $[x, y]_\alpha = 0$ atau $d(x) = 0$. Karena d merupakan *derivation* tak nol maka $d(x) \neq 0$ sehingga $[x, y]_\alpha = 0$ untuk setiap $x, y \in U$, $\alpha \in \Gamma$. Hal tersebut menunjukkan bahwa U komutatif. Berdasarkan Lemma 3.2.3 dapat ditunjukkan bahwa M komutatif.

Terbukti bahwa M komutatif.

BAB IV

PENUTUP

4.1. Kesimpulan

Kesimpulan yang didapatkan dari pembahasan skripsi ini adalah:

1. Kekomutatifan dari suatu Γ-ring dapat dilihat dari sifat-sifat yang berlaku pada idealnya.
2. Kekomutatifan dari suatu Γ-ring dapat dilihat dari *generalized derivation* pada Γ-ring tersebut yang memenuhi suatu syarat tertentu.

4.2. Saran

Dalam skripsi ini hanya dibahas beberapa teorema dari keseluruhan teorema yang ada pada jurnal utama yaitu Alkenani (2015), serta hanya diberikan sebuah contoh *generalized derivation* pada Γ-ring. Selanjutnya skripsi ini dapat dikembangkan dengan membahas keseluruhan teorema pada jurnal utama dan memberi contoh pada setiap butir teorema.

DAFTAR PUSTAKA

Alkenani, A.N., dkk. 2015. Generalized Derivation On Gamma Rings. *International Journal of Algebra*, Vol. 9, no. 6, 273 - 281. http://dx.doi.org/10.12988/ija.2015.5636

Andari, A. 2014. *Ring Field dan Daerah Integral.* Universitas Brawijaya Press. Malang.

Barnes, W.E. 1966. On the Γ-ring of Nobusawa. *Pacific J. Math.*, 411 - 422. http://dx.doi.org/10.2140/pjm.1966.18.411

Chaudhuri, N.P. 1983. *Abstract Algebra.* Tata McGraw-Hill Publishing Company Limited. New Dehli.

Nobusawa, N. 1964. On generalizations of ring theory. *Osaka J. Math.*, 81 - 89.

Rehman, N. 2002. On commutativity of rings with generalized derivations, *Math. J. Okayama Univ.*, 43 - 49.